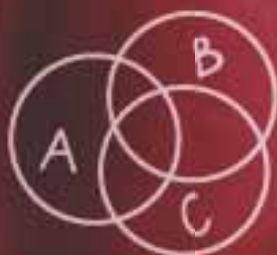
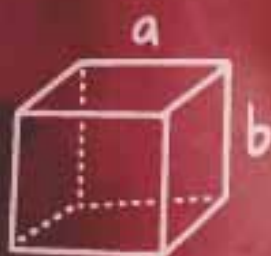


$$P = 6a^2$$



MATEMATIKA

PËR KLASËN E SHTATË
NË ARSIMIN FILLOR

7

TEKST SHKOLLOR

$$3x + 4 = 6x + 1$$

$$3x - 6x = 1 - 4$$

$$-3x = -3$$

$$9^2 = 81$$



Dr. Valentina Gogovska | Snezhana Ristovska

MATEMATIKA

PËR KLASËN E SHTATË
TË ARSIMIT FILLOR

TEKST SHKOLLOR

7



MATEMATIKA 7, tekst shkollor për klasën e shtatë të arsimit fillor

Botuesi:

Shoqëria për veprimtari botuese, prodhim, tregti dhe shërbime ALBI SH.P.K Shkup, 2025

Redaktor:

Elena Stefanovska

Autorë:

Dr. Valentina Gogovska
Snezhana Ristovska

Përkthimi nga gjuha maqedone:

(„Математика 7, учебник за седмо одделение во основно образование“, АЛБИ 2025)
Krutan Rasimi

Redaktimi gjuhësor:

Mr. Solidar Sulejmani

Përpunimi artistik dhe grafik:

Pablik diplomasi Shkup

Shtyp:

POLIESTERDEJ SH.P.K.NJ.P Shkup

Tirazhi:

7.200

Te gjitha te drejtat janë te rezervuara. Asnje pjesë e këtij libri nuk mund të rishtypet ose bartet në çfaredo qofte forme ose me çfaredo qofte mjete, elektronike ose mekanike, përfshi edhe fotokopjimin, dokumentimin ose të ruhet në sistem për gjetje të serishme pa pajtueshmerine me shkrim nga botuesi.

Ky liber është miratuar për përdorim në arsimin fillor nëntëvjeçar, me Vendimin për miratimin dhe përdorimin e tekstit shkollor të lëndës mesimore MATEMATIKA për klasën e 7 të arsimit fillor numer 26- 913/1, datë 22.08.2025, Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut.

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=18

GOGOVSKA, Valentina

Matematika 7 : tekst shkollor për klasën e shtatë të arsimit fillor

/ Valentina Gogovska, Snezhana Ristovska ; përkthimi nga gjuha maqedone

Krutan Rasimi. - Shkup : Albi, 2025. - 383 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Математика 7 : учебник за седмо одделение во основно образование

ISBN 978-608-241-063-0

1. Ristovska, Snezhana [автор]

COBISS.MK-ID 66831621

HYRJE

Të dashur nxënës e të dashura nxënëse.

Mirë se erdhët në aventurën e quajtur matematika për klasën e shtatë!

Ky tekst shkollor është udhërrëfyesi juaj në botën e numrave, formulave dhe detyrave. Ndonjëherë, ndoshta matematika duket e ndërlikuar, me kureshtje, mund e punë do të zbuloni se ajo njëkohësisht është sa interesante aq edhe e dobishme.

Çdo njësi mësimore do t'u drejtojë hap pas hapi - duke rikujtuar atë që tashmë e dini dhe duke mbindërtuar dije të reja, përmes shembujve dhe detyrave nga përditshmëria. Ju presin sfida që do të zhvillojnë logjikën, kreativitetin dhe mendimin e juaj të pavarur. Mos keni frikë nga gabimet - janë pjesë e të mësuarit.

Përveç kësaj, do të keni mundësinë që të përdorni edhe vegla digjitale për ushtrime më të lehta dhe interesante.

Matematika nuk është vetëm një lëndë shkollore - ajo është mënyrë e të menduarit dhe të kuptuarit të botës. Jini të guximshëm, parashtroni pyetje dhe argëtohuni në këtë aventurë matematikore!

Ju dëshirojmë sukses dhe fat.

Nga ekipi i autorëve

Përmbajtja

Tema 1: Numrat dhe operacionet me numra

Operacionet me bashkësi	9
Veti të operacionit të prerjes dhe unionit të bashkësive	16
Bashkësia e çifteve të renditura	21
Numrat e plotë. Krahاسimi dhe renditja	26
Vlera absolute	31
Mbledhja e numrave të plotë me shenja të njëjta ose të ndryshme	36
Veti të operacionit të mbledhjes së numrave të plotë	42
Ekuacionet e llojit $x + a = b$. Zbritja e numrave të plotë	46
Shumëzimi i numrave të plotë	50
Veti të operacionit të shumëzimit të numrave të plotë	55
Pjesëtimi i numrave të plotë	59
Vlera e shprehjes numerike	63
Fuqia me tregues numër natyror	68
Katrorët dhe rrënjët katrore deri 100	73
Krahاسimi i thyesave	77
Numrat dhjetorë periodikë	82
Përshkrimi, njehsimi dhe krahاسimi i pjesëve të së tërës me thyesa dhe përqindje	86
Mbledhja e thyesave	90
Zbritja e thyesave	94
Shumëzimi i thyesave	98
Pjesëtimi i thyesave	103
Mbledhja dhe zbritja e numrave dhjetorë me numër të ndryshëm dhjetorësh	108
Shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave dhjetorë	112
Lidhja mes raportit dhe pjesës nga e tëra	117
Zbatimi i përpjesëtimt të drejtë në situata reale	121

Tema 2: Gjeometria

Vija rrethore dhe rrethi	127
Tangjenta e vijës rrethore	133
Mbledhja dhe zbritja grafike e segmenteve	136
Konstruktimi i drejtëzave paralele dhe normale dhe i simetrales së segmentit	142
Konstruktimi i elementeve gjeometrike me softuer arsimor	148
Konceptet themelore për këndet dhe gjysmërrafshet	152
Matja, vlerësimi dhe vizatimi i këndeve	157
Këndi qendror	162
Operacione me kënde	168
Mbledhja dhe zbritja grafike e këndeve	173
Konstruktimi i simetrales së këndit dhe këndeve 60° , 30° , 15° , 90° , 45°	177
Transversalet dhe drejtëzat paralele	182
Shumëkëndëshat konveks dhe jokonveks	186
Konceptet bazike për trekëndëshat	190
Konstruktimi i trekëndëshave	194

Konstruktimi i vijës rrethore jashtashkruar dhe brendashkruar trekëndëshit	199
Katërkëndëshat dhe klasifikimi sipas çifteve të brinjëve paralele	203
Shuma e këndeve të katërkëndëshit	208
Paralelogrami dhe veti të paralelogramit	211
Llojet e paralelogrameve dhe vetitë e tyre	217
Simetria boshtore në sistemin koordinativ	223
Translacioni në sistemin koordinativ	228
Rotacioni i shumëkëndëshave dhe zbatimi	233
Paraqitja e formave 3D në projeksione të ndryshme	237

Tema 3: Algjebra

Bazat e algjebërës. Kufizat, shprehjet dhe ekuacionet	243
Thjeshtimi i shprehjes lineare. Logaritja e vlerës	247
Formulat. Shprehja e një ndryshoreje përmes një tjetre	251
Ekuacioni linear me një të panjohur. Zgjidhja e ekuacionit	255
Vargjet me numra të plotë	259
Paraqitja e funksioneve të thjeshta	264
Paraqitja grafike e funksionit linear dhe çiftet koordinative	268
Grafikët e funksioneve lineare paralele me boshtin x ose boshtin y	273

Tema 4: Matjet

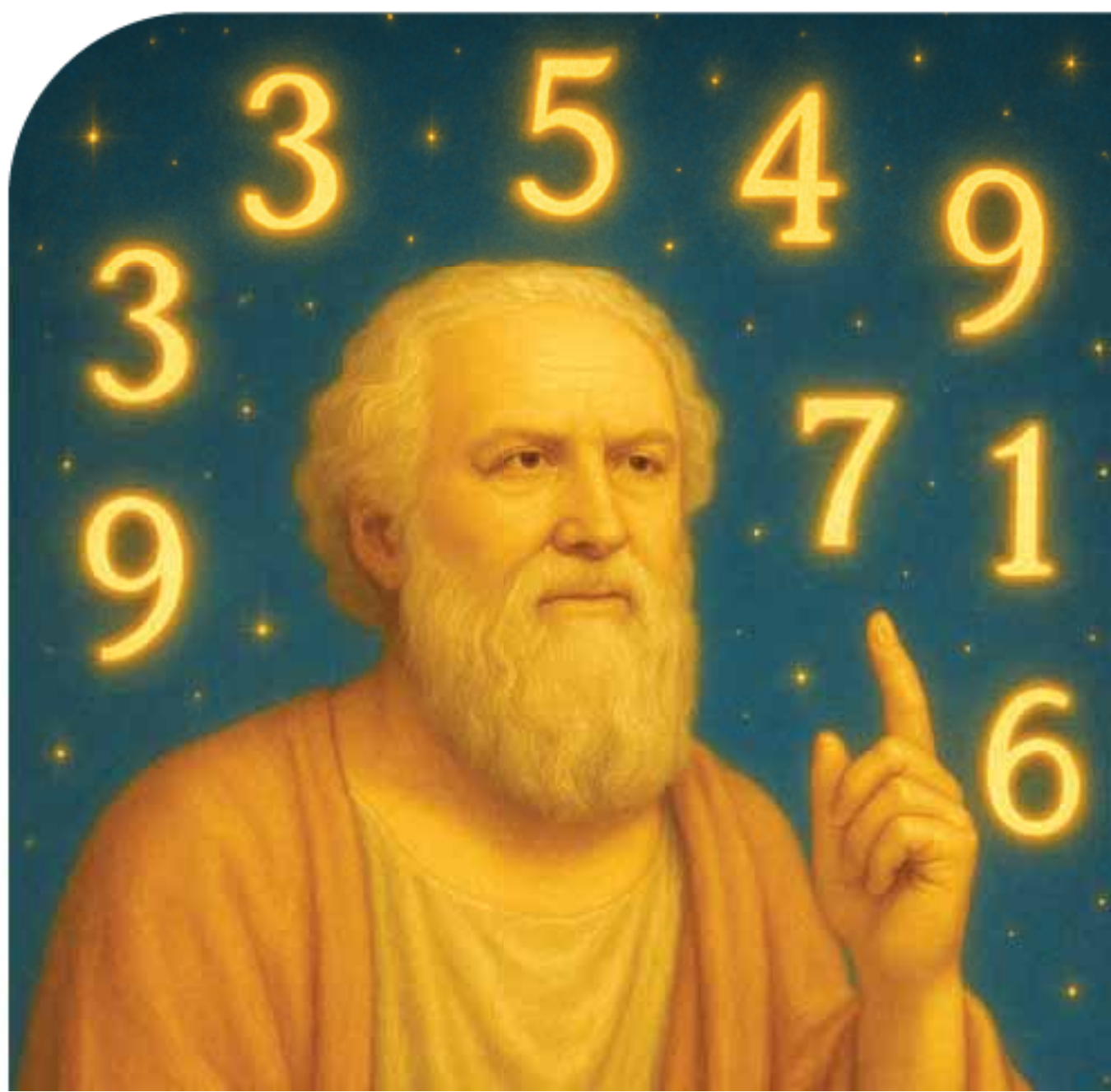
Instrumentet për matjen e gjatësisë dhe njësitë matëse. Mikroni	279
Instrumentet për matjen e masës dhe shndërrimi i njësive matëse për masën	285
Matja dhe njësitë matëse për vëllimin	289
Koha. Sistemi 12-orësh dhe 24-orësh	294
Logaritja e intervaleve kohore dhe puna me grafikë	302
Perimetri i trekëndëshit dhe katërkëndëshit	310
Syprina e formave të ndërlikuara 2D	317
Vëllimi dhe njësitë matëse për vëllimin	321
Vëllimi i kuadrit dhe kubit	326
Njehsimi i syprinës së kubit dhe kuadrit nga rrjetet e tyre	330

Tema 5: Puna me të dhëna

Planifikimi i hulumtimit	337
Grumbullimi dhe organizimi i të dhënave për hulumtim	342
Diagrami me shtylla dhe ai rrethor	347
Vizatimi dhe interpretimi i diagramit vijor dhe piktogramit	353
Klasa modale dhe diagrami i frekuencave për të dhënat e grupuara	360
Vlerësimi dhe njehsimi i mesatares aritmetike. Krahasimi i dy bashkësive të të dhënave	366
Rezultatet e eksperimentit. Probabiliteti	373
Probabiliteti eksperimental dhe teorik	378

TEMA
1

NUMRAT DHE OPERACIONET ME NUMRA



Akademia e Platonit dhe magjia e numrave

Në Greqinë antike, në Akademinë e Platonit numri nuk ishte vetëm vegël, mjet, për numërim, por diçka e shenjtë, diçka sublime. Platoni dhe nxënësit e tij besonin se gjithçka është numër – çdo pjesë e natyrës, e muzikës, e lëvizjes së planetëve, mund të kuptohet përmes numrave. Për Platonin numrat nuk ishin vetëm abstraksione, por ishin ide të përkryera, ishin të përhershëm dhe të pandryshueshëm.

Madje edhe kur nuk i shohim, numrat përsëri ekzistojnë. Ata simbolizojnë rend, logjikë, harmoni në natyrë dhe mendimin njerëzor.

“Kur kuptoni se si lidhen numrat mes veti, matematika bëhet si hartë që u shpie drejt zgjidhjes”

Rezultatet e mësimit

Pasi të kemi kaluar këtë temë do të jeni të aftë që:

- t'i zbatoni operacionet me bashkësi në zgjidhjen e problemeve;
- t'i zbatoni numrat e plotë dhe vlerën absolute të numrit të plotë në kontekst të përditshmërisë;
- të përdorni ligjet aritmetike dhe operacionet inverse, të kundërta, që të thjeshtohet llogaritja me numrat e plotë;
- të përdorni fuqitë me tregues, eksponent, numër natyror dhe rrënjët katrore të numrave të caktuar natyrorë në zgjidhjen e problemeve;
- të përdorni lidhjen mes thyesave, numrave dhjetorë dhe përqindjeve gjatë zgjidhjes së problemeve në kontekst të përditshmërisë;
- të zgjidhni probleme nga përditshmëria me operacionet me numrat racionalë pozitivë;
- të zgjidhni probleme me raport dhe përpjesëtim të drejtë.

Operacionet me bashkësi

Në këtë njësi do të mësoni si të kryeni operacione të ndryshme me bashkësi që do t'u ndihmojnë të kuptoni se si grupe të ndryshme të elementeve mund të lidhen ose dallohen mes veti.

Përmes shembujve dhe detyrave do të zbuloni se si zbatohen bashkësitë në matematikë dhe jetën reale, sikurse është organizimi i të dhënave, analizimi i vetive të përbashkëta dhe arritja në përfundime logjike.



Shembulli 1

Në oborrin e shkollës nxënësit e tri paraleleve të ndryshme dëshirojnë të luajnë sporte të ndryshme. Sipas sportit që luajnë janë shpërndarë në bashkësitë vijuese:

- Nxënësit që luajnë futboll janë elemente të bashkësisë A; $A = \{\text{Ana, Marko, Tina}\}$
- Nxënësit që luajnë basketboll janë elemente të bashkësisë B; $B = \{\text{Tina, Petri, Martini}\}$
- Nxënësit që luajnë hendboll janë elemente të bashkësisë C; $C = \{\text{Ana, Martini, Lana}\}$

- a) Cilët nxënës i takojnë bashkësisë A?
- b) Cilët nxënës i takojnë bashkësisë B, kurse nuk i takojnë bashkësisë A?
- c) Cilët nxënës dëshirojnë të luajnë edhe futboll edhe basketboll?
- ç) Shkruani nga një nënbashkësi të bashkësisë A dhe bashkësisë B?
- d) Cilët nxënës nuk luajnë asnjërin nga sportet e përmendura nëse dimë se në oborrin e shkollës janë nxënësit e bashkësisë në vijim $\{\text{Ana, Marko, Tina, Petri, Martini, Jana, Lluka, Lana}\}$?

Zgjidhje:

- a) Nxënësit që i takojnë bashkësisë A (që duan të luajnë futboll) janë: Ana, Marko, Tina, ose mund të shkruajmë $\text{Ana} \in A$, $\text{Marko} \in A$ dhe $\text{Tina} \in A$.
- b) Nxënësit që i takojnë bashkësisë B (që duan të luajnë basketboll) janë: Tina, Petri, Martini, ose $\text{Tina} \in B$, $\text{Petri} \in B$ dhe $\text{Martini} \in B$.
Nga këta nxënës futboll nuk luajnë, përkatësisht nuk i takojnë bashkësisë A: Petri dhe Martini, ose mund të shkruajmë $\text{Petri} \notin A$, $\text{Martini} \notin A$.
- c) Nxënësi që luan edhe futboll edhe basketboll është vetëm Tina.
- ç) Nënbashkësi e A është bashkësia $A_1 = \{\text{Tina}\}$ dhe mund të shkruajmë $A_1 \subset A$.
Nënbashkësi e B është bashkësia $B_1 = \{\text{Tina, Petar}\}$, $B_1 \subset B$.
Sigurisht se ka akoma nënbashkësi të tjera, por kërkohej vetëm nga një, cilado qoftë.
- d) Nxënësit që nuk luajnë asnjërin nga këto sporte do t'i fitojmë kur nga bashkësia e gjithë nxënësve që janë në oborrin shkollor $S = \{\text{Ana, Marko, Tina, Petar, Martin, Jana, Lluka, Lana}\}$ do t'i largojmë nxënësit që dëshirojnë të luajnë të paktën një sport. Lluka dhe Lana nuk luajnë asnjërin nga këta sporte.

Detyra 1

Paraqitni me diagram të Venit bashkësitë: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ dhe $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Shembulli 2

Për një projekt shkollor, nxënësit duhej të realizonin një hulumtim me qëllim që të mësonin se sa është interesimi për aktivitete sportive, artistike dhe të tjera jashtë shkollore. Si rezultat i hulumtimit ata fituan bashkësitë në vijim:

Nxënësit që marrin pjesë në aktivitete sportive, janë elemente të bashkësisë

$A = \{\text{Maria, Lluka, Jana, Petri, Tina}\}$.

Nxënësit që marrin pjesë në aktivitete artistike, janë elemente të bashkësisë

$B = \{\text{Lluka, Tina, Stefani, Ana, Jana}\}$.

- Cilët nxënës marrin pjesë edhe në aktivitete sportive edhe artistike?
- Shkruani elementet e prerjes së bashkësive A dhe B duke e përdorur simbolin e operacionit e prerjes së bashkësive $A \cap B$.
- Paraqitni prerjen e bashkësive A dhe B me diagram të Venit.

Zgjidhje:

- Nxënësit që marrin pjesë edhe në aktivitete sportive edhe në ato artistike janë: Lluka, Jana, Tina. Me C mund të shënojmë bashkësinë në të cilën bëjnë pjesë nxënësit nga A dhe B , $C = \{\text{Lluka, Jana, Tina}\}$. Bashkësinë C e quajmë prerje të bashkësive A dhe B .

Prerja e dy bashkësive është bashkësia e përbërë prej elementeve të përbashkëta të dyja bashkësive. Me fjalë të tjera, nëse janë dhënë dy bashkësi A dhe B , atëherë prerja e tyre, që shënohet me $A \cap B$, është bashkësia $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dhe } x \in B\}$

- Në shembullin tonë prerjen e bashkësive A dhe B , duke e shfrytëzuar simbolin e operacionit të prerjes të bashkësive $\cap$, do ta shkruajmë:
 $A \cap B = C = \{\text{Lluka, Jana, Tina}\}$.
- Prerja e bashkësive është dhënë me diagramin e Venit.

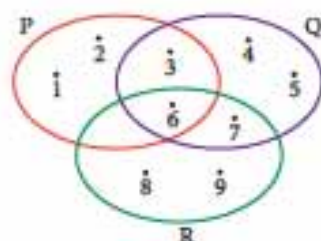


Dy bashkësi A dhe B që nuk kanë elemente të përbashkëta, përkatësisht për të cilat $A \cap B = \emptyset$, janë bashkësi disjunkte (përjashtuese).

Detyra 2

Duke e përdorur vizatimin ku me diagram të Venit janë paraqitur bashkësitë P, Q dhe R, shkruani bashkësitë:

- a) $P \cap Q$ b) $Q \cap R$ c) $P \cap Q \cap R$



Shembulli 3

Në një shkollë nxënësit regjistrohen në seksione të ndryshme sipas interesit të tyre. Janë dhënë dy bashkësi:

Nxënësit që ndjekin seksionin e matematikës, janë elemente të bashkësisë

$A = \{\text{Maria, Petri, Ana, Jovani}\}$

Nxënësit që ndjekin seksionin e informatikës, janë elemente të bashkësisë

$B = \{\text{Jovani, Ana, Lluka, Elena}\}$

- a) Cilët nxënës janë regjistruar të paktën në njërin nga seksionet (në A ose B)?
b) Shkruani elementet e unionit të bashkësive A dhe B duke e përdorur simbolin për unionin e bashkësive $A \cup B$.
c) Përshkruani se çfarë paraqet unioni i bashkësive A dhe B në kontekst të seksioneve.

Zgjidhje:

- a) Nxënësit nga bashkësitë A dhe B që ndjekin të paktën njërin nga seksionet formojnë një bashkësi të re të cilën mund ta shënojmë, për shembull, me D, pra $D = \{\text{Maria, Petri, Jovani, Lluka, Elena}\}$. Bashkësinë D e quajmë union të bashkësive A dhe B.

Unioni i dy bashkësive është bashkësia e përbërë nga gjitha elementet e të dy bashkësive. Me fjalë tjera, nëse janë dhënë dy bashkësi A dhe B, atëherë unioni i tyre, shënohet me $A \cup B$, është bashkësia $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ose } x \in B\}$.

- b) Unioni i bashkësive A dhe B është bashkësia D: $A \cup B = \{\text{Maria, Petri, Ana, Jovani, Lluka, Elena}\}$ ose $D = A \cup B = \{\text{Maria, Petri, Ana, Jovani, Lluka, Elena}\}$.
c) Unioni $A \cup B$, në të vërtetë, është bashkësia D e përbërë, ndërtuar, nga gjithë nxënësit që ndjekin të paktën njërin nga seksionet. Kjo do të thotë se nëse nxënësi është anëtar i seksionit të matematikës, informatikës ose të dy seksioneve, atëherë ai do të jetë element i kësaj bashkësie.

Detyra 3

Janë dhënë bashkësitë $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $B = \{13, 14, 15, 16\}$ dhe $C = \{14, 15, 16, 17, 18\}$.

- a) Bashkësitë e dhëna paraqitni me diagram të Venit.
b) Përcaktoni dhe shkruani bashkësitë: $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cup (B \cap C)$.

Detyra 4

Në një ushqimore ka dy lloje uljesh:

Prodhime me ulje nëse blini dy prodhime të njëjta, bashkësia $P = \{\text{bukë, qumësht, jogurt, djathë}\}$.

Prodhime me ulje nëse shfrytëzoni kartelën për ulje, bashkësia $D = \{\text{qumësht, djathë, kafe, oriz}\}$.

- Cilat prodhime kanë ulje nëse blini dy prodhime të njëjta dhe nëse përdorni kartelën?
- Cilat prodhime kanë ulje nëse vlen të paktën njëri nga kushtet?
- Cili është dallimi mes përdorimit të fjalës “dhe” dhe “ose” në këto pyetje?
- Shkruani përgjigjet duke shfrytëzuar operacionet matematike prerje $\cap$ dhe union $\cup$.
- Cilën shprehje do ta shfrytëzonit nëse dëshironi të blini prodhime që i kanë të dy uljet njëkohësisht?
- Cilën shprehje do ta shfrytëzonit nëse dëshironi të blini prodhime që kanë të paktën njërin nga uljet?

Shembulli 4

Në një bibliotekë ka dy grupe librash:

Libra që janë në dispozicion për huazim, bashkësia $A = \{\text{“Harri Poter”, “Mbreti i malit”, “Princi i vogël”, “Alisa në botën e çudirave”, “Robinson Kruzo”}\}$

Libra që aktualisht janë të huazuar, bashkësia $B = \{\text{“Princi i vogël”, “Alisa në botën e çudirave”, “Robinson Kruzo”}\}$.

- Cilët libra janë në dispozicion për huazim dhe aktualisht nuk janë huazuar?
- Përgjigja në pyetjen e parë si mund të formulohet matematikisht si ndryshim bashkësish?
- Si mund të paraqitet përgjigja me anë të diagramit të Venit?
- Si do të përshkruhej me fjalë ky ndryshim i bashkësive?

Zgjidhje:

- Libra që janë në dispozicion dhe nuk janë të huazuar: janë librat në bashkësinë A , kurse nuk janë në bashkësinë B , përkatësisht bashkësia $\{\text{“Harri Poter”, “Mbreti i malit”}\}$. Kjo bashkësi quhet ndryshim i bashkësive A dhe B .

Bashkësia e gjitha elementeve që i takojnë bashkësisë A dhe nuk i takojnë bashkësisë B quhet ndryshim i bashkësisë A me bashkësinë B . Me fjalë të tjera, nëse janë dhënë dy bashkësi A dhe B , atëherë ndryshimi i tyre, i cili shënohet me $A \setminus B$, është bashkësia $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \notin B\}$.

- b) E shkruar me simbole matematike:
 $A \setminus B = \{\text{"Harri Potter", "Mbreti i malit"}\}$.
- c) Në vizatimin e dhënë diferenca, ndryshimi, i bashkësive $A \setminus B$ është paraqitur me pjesën e ngjyrosur të diagramit.
- ç) Ndryshimi $A \setminus B$ paraqet librat që biblioteka i ka në dispozicion, por aktualisht nuk janë të huazuar.



Detyra 5

Janë dhënë bashkësitë $M = \{x \mid x \text{ është numër natyror dyshifror}\}$ dhe $N = \{12, 14, 16, 18\}$.

- a) Paraqitni bashkësitë me diagram të Venit?
- b) Përcaktoni dhe shkruani bashkësitë: $M \setminus N$, $N \setminus M$, $N \cup (M \setminus N)$.

Shembulli 5

Ana, Bobi dhe Kalina planifikojnë disa aktivitete për fundjavë. Secili ka ide të ndryshme se çfarë dëshiron të bëjë. Aktivitetet që dëshiron t'i bëjë Ana janë dhënë me bashkësinë $A = \{\text{alpinizëm, vajtja në kinema, çiklizëm, vrapim}\}$. Aktivitetet që dëshiron t'i bëjë Bobi janë dhënë me bashkësinë $B = \{\text{video lojëra, vajtja në kinema, basketboll, çiklizëm}\}$. Aktivitetet që dëshiron t'i bëjë Kalina janë dhënë me bashkësinë $C = \{\text{alpinizëm, notim, vajtja në kinema, joga}\}$.



Ndihmoni të vendosin çfarë mund të bëjnë bashkërisht e çka veçmas secili prej tyre!

- a) Cilat aktivitete bashkërisht mund t'i realizojnë që të tre?
- b) Cilat aktivitete mund t'i realizojnë të paktën dy prej tyre?
- c) Cilat aktivitete mund të përzgjidhen nëse vlen të paktën një nga propozimet?
- ç) Cilat aktivitete i pëlqen Ana, por jo edhe Bobi?
- d) Si mund ta paraqesim këtë me diagram të Venit?

Zgjidhje:

- a) Aktivitetet që mund t'i bëjnë bashkërisht: $A \cap B \cap C = \{\text{vajtja në kinema}\}$.
- b) Aktivitet që mund t'i bëjnë të paktën dy prej tyre:
- Për Anën dhe Bobin, aktivitete të përbashkëta janë vajtja në kinema dhe çiklizëm, përkatësisht $C = A \cap B = \{\text{vajtja në kinema, çiklizëm}\}$.
 - Për Anën dhe Kalinën, aktivitete të përbashkëta janë alpinizmi dhe vajtja në kinema, përkatësisht $D = A \cap C = \{\text{alpinizëm, vajtja në kinema}\}$.
 - Për Bobin dhe Kalinën, aktivitet i përbashkët është vajtja në kinema, përkatësisht $E = B \cap C = \{\text{vajtja në kinema}\}$.

Nëse e gjeni unionin e bashkësive C , D dhe E , atëherë do të fitoni bashkësinë në të cilën të paktën dy prej tyre dëshirojnë aktivitetin e njëjtë, përkatësisht $C \cup D \cup E = \{\text{vajtja në kinema, çiklizëm, alpinizëm}\}$.

- c) Aktivitete që të paktën njëri prej tyre dëshiron t'i bëjë: $A \cup B \cup C = \{\text{alpinizëm, vajtja në kinema, çiklizëm, vrapim, video lojëra, basketboll, notim, joga}\}$.
- ç) Aktivitetet që i dëshiron Ana, por nuk i dëshiron Bobi: $A \setminus B = \{\text{alpinizëm, vrapim}\}$.
- d) Diagrami i Venit është treguar në vizatim.



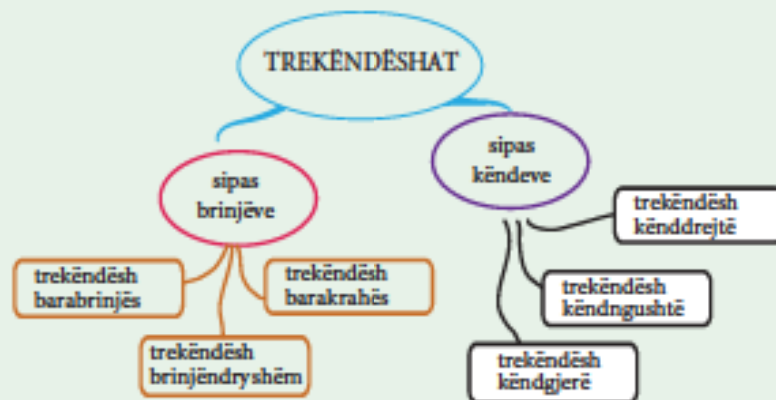
Detyra 6

Një turist planifikon udhëtimin dhe ka tri mundësi për transport:

1. Mjete të shpejta transporti, bashkësia $A = \{\text{avion, tren}\}$.
2. Mjete të lira transporti, bashkësia $B = \{\text{autobus, tren}\}$.
3. Mjete të rehatshme transporti, bashkësia $C = \{\text{avion, tren, anije}\}$
 - a) Cilat mjete transporti janë të shpejta dhe të lira?
 - b) Cilat mjete transporti janë të shpejta dhe të rehatshme?
 - c) Cilat mjete transporti i takojnë të tri bashkësive?
 - ç) Si mund të paraqitet përzgjedhja me diagram të Venit?

A mund të jepni një shembull nga përditshmëria juaj ku përdoren operacione me bashkësi ($\cap$, $\cup$, $\setminus$) gjatë sjelljes së vendimeve? Sqaroni se si i përdorni.

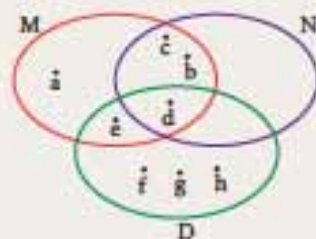
Bëj një hartë mendore për gjithçka që di në lidhje me bashkësitë dhe operacionet me bashkësi. Në vizatimin në vijim është dhënë shembull i një harte mendore në lidhje me kuptimin, konceptin, e trekëndëshit.



Punë e pavarur

1. Në vizatimin djathtas janë dhënë bashkësitë M , N dhe D .

- Shkruani bashkësitë M , N dhe D në mënyrë tabelore.
- Caktoni: $M \cap N$, $N \cap D$, $M \cap D$.
- Caktoni: $M \cup N$, $N \cup D$, $M \cup D$.
- Caktoni: $M \setminus N$, $N \setminus D$, $M \setminus D$.



2. Nëse $M = \{10, 12, 14, 16\}$, kurse $N = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, cila nga bashkësitë në vijim: $\{9, 10, 11, 12, 14, 16\}$, $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$, $\{10, 12\}$, $\{14, 16\}$, $\{14, 16, 9, 13\}$, $\{9, 11, 13\}$, paraqet prerjen, unionin dhe ndryshimin e bashkësive M dhe N .

3. Në vizatimin me diagramin e Venit janë dhënë bashkësitë A , B dhe C . Shkruani në mënyrë tabelore bashkësitë:

- A , B dhe C
- $B \cap C$, $A \cap B$, $B \cap \emptyset$
- $B \cup C$, $A \cup C$
- $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus C$



4. Me diagram të Venit paraqitni bashkësitë: $A = \{1, 4, 5, 7\}$ dhe $B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$.

5. Janë dhënë bashkësitë: $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $N = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 6 \leq x \leq 11\}$ dhe $P = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 3 < x \leq 11\}$. Cakto:

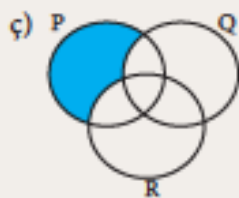
- $M \cap N$, $N \cap P$, $P \cap M$
- $M \cup N$, $N \cup P$, $P \cup M$

6. Çfarë paraqesin elementet e bashkësisë $A \cap B$, nëse A është bashkësia e gjitha vajzave në klasën tënde, kurse B është bashkësia e gjithë nxënësve të klasave të shtata të shkollës?

7. Bashkësitë $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } x < 7\}$ dhe $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } x \text{ është numër nga dhjetëshja e parë}\}$, paraqitni në mënyrë tabelore dhe me diagram të Venit. Më pas gjeni ndryshimin $A \setminus B$, $B \setminus A$.

8. Në vizatimin më poshtë janë paraqitur bashkësitë me diagrame të Venit. Cilat operacione janë paraqitur përmes pjesëve të ngjyrosura?

-
-
-
-

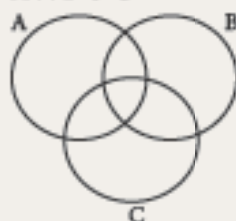


9. Vizatoni rishtas, në fletoren tuaj, secilin nga diagramet, e më pas ngjyrosni pjesën që i përgjigjet operacioneve të dhëna:

a) $A \cap B$



b) $A \cap B \cup C$



c) $(A \cup B) \setminus (B \cup A)$



d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$



Veti të operacionit të prerjes dhe unionit të bashkësisë

Gjatë punës me bashkësi është e rëndësishme të kuptohen dhe përdoren veti të caktuara të operacioneve union dhe prerje. Në këtë njësi do të mësoni se cilat janë vetitë themelore të këtyre operacioneve, sikurse janë për shembull vetia komutative (e ndërrimit) dhe ajo asociative (e shoqërimit). Këto veti do të mundësojnë që të dalloni dhe thjeshtoni shprehjet me bashkësi. Me shembuj dhe detyra do të vëreni se si këto veti do të ndihmojnë në mendimin logjik dhe zgjidhjen e problemeve lidhur me bashkësi.

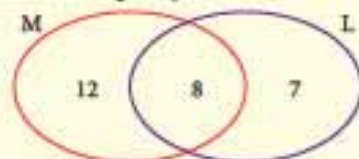


Shembulli 1

Në një shkollë 20 nxënës ndjekin orë mësimi nga matematika (bashkësia M), kurse 15 nxënës ndjekin orë mësimi nga informatika (bashkësia I). Prej tyre, 8 nxënës ndjekin orë mësimi edhe nga matematika edhe nga informatika. Sa nxënës ndjekin mësimin vetëm në një lëndë?

Zgjidhje:

Që të përcaktojmë sa nxënës ndjekin mësimin vetëm në një lëndë (numrin e elementeve të bashkësisë $(M \setminus L) \cup (L \setminus M)$) duhet të gjejmë numrin e elementeve të unionit të bashkësive të nxënësve që ndjekin vetëm orë nga matematika dhe bashkësisë së nxënësve që ndjekin orë vetëm nga informatika. Numrin e nxënësve që ndjekin orë vetëm nga matematika e gjejmë kur nga numri i nxënësve që ndjekin matematikën heqim numrin e nxënësve që ndjekin të dy lëndët, d.m.th. $20 - 8 = 12$. Kjo do të thotë se 12 nxënës ndjekin vetëm orë mësimi nga matematika. Numrin e nxënësve që ndjekin vetëm orë të informatikës e gjejmë kur nga numri i nxënësve që ndjekin informatikë heqim numrin e nxënësve që ndjekin të dy lëndët, d.m.th. $15 - 8 = 7$. Numri i elementeve i unionit të bashkësive do të jetë shuma e numrit të elementeve të dy bashkësive (bashkësitë janë disjunkte), respektivisht $20 - 8 + 15 - 8 = 19$ ($12 + 7 = 19$).



Pra, gjithsej janë 19 nxënës që ndjekin vetëm njërin nga dy lëndët.

Për prerjen dhe unionin e dy bashkësive vlen vetia komutative, përkatësisht nëse A dhe B janë dy bashkësi të dhëna, atëherë $A \cap B = B \cap A$ dhe $A \cup B = B \cup A$.

Shembulli 2

Janë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3\}$ dhe $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Caktoni bashkësitë:

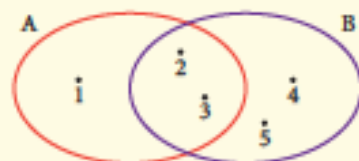
- a) $A \cap B$ dhe $B \cap A$ b) $A \cup B$ dhe $B \cup A$

Zgjidhje:

Për pamje më të mirë, e përdorim diagramin e Venit.

- a) $A \cap B = \{2, 3\}$, $B \cap A = \{2, 3\}$. Pasi $\{2, 3\} = \{2, 3\}$, rrjedh se $A \cap B = B \cap A$.

- b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Pasi $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, rrjedh se $A \cup B = B \cup A$.



Për prerjen dhe unionin e bashkësive vlen vetia asociative, përkatësisht nëse A, B dhe C janë tri bashkësi të dhëna, atëherë $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ dhe $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Shembulli 3

Janë dhënë bashkësitë: $M = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $N = \{13, 14, 15, 16\}$ dhe $P = \{13, 15, 17, 19\}$. Caktoni dhe shkruani bashkësitë:

- a) $(M \cap N) \cap P$ dhe $M \cap (N \cap P)$ b) $(M \cup N) \cup P$ dhe $M \cup (N \cup P)$

Zgjidhje:

Për pamje më të mirë, bashkësitë M , N dhe P i paraqesim me diagram të Venit.



- a) $(M \cap N) \cap P = \{13, 14, 15\} \cap \{13, 15, 17, 19\} = \{13, 15\}$
dhe $M \cap (N \cap P) = \{11, 12, 13, 14, 15\} \cap \{13, 15\} = \{13, 15\}$.
Fituam $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.
- b) $(M \cup N) \cup P = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\} \cup \{13, 15, 17, 19\} =$
 $= \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\}$ dhe
 $M \cup (N \cup P) = \{11, 12, 13, 14, 15\} \cup \{13, 14, 15, 16, 17, 19\} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\}$
Fituam $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$.

Detyra 1

Janë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c, d\}$ dhe $B = \{b, c, d, e, f\}$. Kontrolloni nëse vlen $A \setminus B = B \setminus A$.

Detyra 2

Kontrolloni me shembuj nëse vlen $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

Shembulli 4

Në një restorant ofrohen tri meny për drekë, edhe atë:

menyja A: $A = \{\text{omëletë, bukë tosti, kafe}\}$; menyja B: $B = \{\text{petulla, kafe, lëng}\}$ dhe menyja C: $C = \{\text{sanduiç, kafe, jogurt}\}$.

- a) Tregoni se unioni i menyve është komutativ, për shembull, se $A \cup B = B \cup A$.
b) Tregoni se unioni i menyve është asociativ, përkatësisht se $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Zgjidhje:

- a) Vetia komutative e unionit.

Le ta gjejmë bashkësinë $A \cup B$, përkatësisht gjitha ushqimet që shfaqen në të paktën njërin nga menyte A dhe B: $A \cup B = \{\text{omëletë, bukë tosti, kafe, petulla, lëng}\}$, $B \cup A = \{\text{petulla, lëng, kafe, omëletë, bukë tosti}\}$. Meqenëse bashkësitë përmbajnë elemente të njëjta (renditja e tyre nuk ka rëndësi), përfundojmë se vlen $A \cup B = B \cup A$.

- b) Vetia asociative e unionit.

Fillimisht gjejmë $(A \cup B) \cup C$: $A \cup B = \{\text{omëletë, bukë tosti, kafe, petulla, lëng}\}$. Tani e caktojmë unionin e kësaj bashkësie që sapo gjetëm me bashkësinë C, përkatësisht:

$(A \cup B) \cup C = \{\text{omëletë, bukë tosti, kafe, petulla, lëng, sanduiç, jogurt}\}$.

Më pas caktojmë bashkësinë $B \cup C = \{\text{petulla, lëng, kafe, sanduiç, jogurt}\}$, e më pas unionin e bashkësisë A me bashkësinë e sapo gjetur $B \cup C$, përkatësisht bashkësinë

$A \cup (B \cup C)$: $A \cup (B \cup C) = \{\text{omëletë, bukë tosti, kafe, petulla, lëng, sanduiç, jogurt}\}$. Pasi dy bashkësitë e fituara janë të njëjta, përfundojmë se: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Kjo do të thotë se pa marrë parasysh se si i grupojmë menyte, lista përfundimtare e ushqimeve që restoranti i ofron nuk ndryshon.

Shembulli 4 na tregon se si vetitë e unionit të bashkësive mund të përdoren në përditshmërinë tonë, sikurse ishte përzgjedhja e menyve, lista e prodhimeve në një shitore ose organizimi i grupeve të ndryshme të objekteve.

Detyra 3

Në një kompani ka tre departamente që përdorin softuerë të ndryshëm për punë, edhe atë:

departamenti i financave (F): Excel, SAP dhe QuickBooks;

departamenti i burimeve njerëzore (H): SAP, BambooHR dhe Trello;

departamenti i marketingut (M): Trello, Google Ads dhe Canva.

- Provoni se vlen vetia komutative, e ndërrimit dhe asociative, e shoqërimit, e prerjes së departamenteve (për shembull, $F \cap H = H \cap F$).
- Provoni vetinë asociative të unionit të departamenteve, përkatësisht $(F \cup H) \cup M = F \cup (H \cup M)$.
- Analizoni kuptimin praktik të këtyre vetive në lidhje me kompaninë dhe organizimin e saj.

Kompania dëshiron të zvogëlojë harxhimet për softuer dhe vendos të mbaj vetëm ato programe të cilët përdoren nga të paktën dy prej departamenteve (financa, burime njerëzore dhe marketing). Si do t'i përdornit vetitë e prerjes dhe unionit për të përpiluar listën e softuerëve që duhet të mbeten në përdorim? Rënditja e departamenteve gjatë grupimit a ndikon në përzgjedhjen përfundimtare të softuerëve? Shpjegoni përgjigjen tuaj.

Në fletore, shpjegoni:

1. Pse prerja dhe unioni janë komutative?

2. Pse unioni është asociativ?

3. Në situata reale, si na ndihmojnë këto veti?



Nëse jep përgjigjet dhe shpjegimet në gjitha pyetjet e mësipërme – ti je mjeshtër për bashkësitë!



Nëse ke dyshime – kthehu në pjesët e mësimin që nuk i ke të qarta dhe provo përsëri!

Punë e pavarur

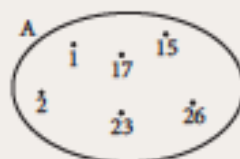
1. Janë dhënë bashkësitë A, B, C dhe D.

$$B = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 3 \leq x \leq 12\} \text{ dhe } D = \emptyset.$$

Gjeni bashkësitë e barabarta nën a, b, c, ç, d, dh, e, ë, f.

- a) $A \cap B$ b) $A \cap C$ c) $B \cap C$ ç) $C \cap A$ d) $C \cap B$
 dh) $B \cap A$ e) $C \cap C$ ë) $A \cap D$ f) $D \cap D$

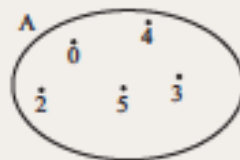


2. Janë dhënë bashkësitë A, B, C dhe D.

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } x < 7\}, C = \{0, 2, 4, 6, 8\} \text{ dhe } D = \{1, 2, 5, 8\}$$

Tregoni se barazimet e mëposhtme janë të sakta:

- a) $A \cap B = B \cap A$ b) $A \cap C = C \cap A$ c) $B \cap C = C \cap B$
 ç) $D \cap B = B \cap D$ d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 dh) $(B \cap D) \cap A = B \cap (D \cap A)$ e) $(C \cap B) \cap D = C \cap (B \cap D)$
 ë) $A \cap A = A$ f) $B \cap B = B$ g) $C \cap \emptyset$

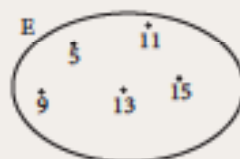


Cilat veti të operacionit prerre janë shprehur me barazimet a, b, c, ç, d, dh, e?

3. Janë dhënë bashkësitë
- $A = \{x \mid x \text{ është numër çift}\}$
- .

 $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \mid x \text{ është numër çift më i vogël se } 10\}$ dhe bashkësia E. Të caktohet:

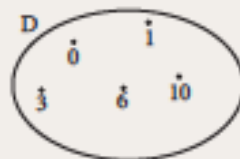
- a) $A \cup B$ b) $A \cup D$ c) $C \cup D$ ç) $C \cup E$ d) $D \cup E$
 dh) $D \cup C$ e) $B \cup A$ ë) $E \cup D$ f) $C \cup C$ g) $\{1, 2, 4\} \cup C$



4. Janë dhënë bashkësitë:

 $A = \{0, 3, 5, 7, 12, 14\}$, $B = \{x \mid x + 5 = 7 \text{ ose } x - 5 = 7\}$, C është bashkësia e numrave natyrorë më të vegjël se 5 dhe bashkësia D është dhënë me diagram të Venit. Tregoni se janë të sakta barazimet:

- a) $A \cup B = B \cup A$ b) $B \cup C = C \cup B$ c) $B \cup D = D \cup B$
 ç) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ d) $B \cup (C \cup D) = (B \cup C) \cup D$
 dh) $(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D)$ e) $A \cup A = A$
 ë) $B \cup B = B$ f) $C \cup \emptyset = C$ g) $A \cup (B \cup A) = A \cup B$



Cilat veti të unionit të bashkësive janë shprehur me barazitë nën a), b), c), ç), d)?

5. A janë të sakta barazimet? Shpjegoni përgjigjen.

- a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \cap C$ b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus C) \setminus C$
 c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap C) \setminus (A \cap C)$ ç) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- 6.* Janë dhënë bashkësitë:
- $A = \{4\}$
- ,
- $B = \{\{4\}\}$
- . Të caktohet: a)
- $A \cap B$
- b)
- $M = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \in B\}$

- 7.* Gjeni unionin e bashkësive:
- $A = \{x \mid x \in X, X \subset \{1\}\}$
- dhe
- $B = \{x \mid x \in \{1, 2\}\}$

Bashkësia e çifteve të renditura

Në këtë njësi mësimore do të përqendrohemi në koncepte të rëndësishme lidhur me çiftet (dyshet) e renditura dhe bashkësitë me dy elemente. Në vazhdim të njësisë do të mësoni si t'i dalloni çiftet e renditura nga bashkësitë me dy elemente dhe si të ndërtoni bashkësinë e çifteve të renditura nga një bashkësi e dhënë. Me shembuj interaktiv dhe detyra do të bindeni se kuptimet e sipërpërmendura bëhen të qartë dhe të zbatueshëm.



Shembull 1

Është dhënë bashkësia $M = \{1, 2, 3\}$. Shkruani gjitha nënbashkësitë dyelementeshe të bashkësisë së dhënë M .

Zgjidhje:

Nënbashkësitë dyelementeshe të bashkësisë M janë: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ dhe $C = \{2, 3\}$. Bashkësitë $\{1, 2\}$ dhe $\{2, 1\}$ a janë të barabarta? Shpjegoni arsyen.

Detyra 1

Maja ka biletë koncerti në të cilën shkruan rreshti 5, ulësja 12, kurse në biletën e Ilirit shkruan rreshti 12, ulësja 5. Maja dhe Iliri a kanë vend të njëjtë të uljes? Për biletat e tyre a mund të shkruajmë $\{5, 12\}$ dhe $\{12, 5\}$? Shpjegoni përgjigjen tuaj.

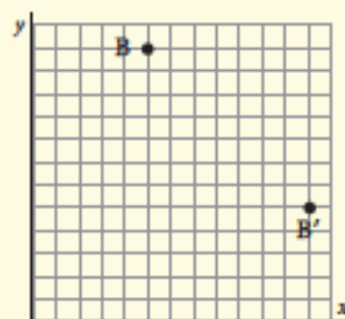
Shembulli 2

Mendoni mbi dallimin e shkrimit të bashkësisë $A = \{5, 12\}$ dhe shkrimin e koordinatave të pikës $B(5, 12)$. Shpjegoni pse shkrimet nuk janë të njëjtë dhe jepni shembuj për këtë.

Zgjidhje:

Shkrimi $A = \{5, 12\}$ është bashkësi e cila përmban dy elemente: 5 dhe 12. Në bashkësi renditja e elementeve nuk ka rëndësi, që do të thotë se shënimi $\{5, 12\}$ është i njëjtë me shënimin $\{12, 5\}$.

Nga ana tjetër, në shembullin me pikën $B(5, 12)$ është shënuar vendndodhja (pozicioni) në rrafshin e koordinatave ku koordinata x është 5, kurse koordinata y është 12. Pika $B'(12, 5)$ tregon pozicionin në rrafshin koordinativ ku koordinata x është 12, kurse koordinata y është 5. Domethënë, pikat B dhe B' janë të ndryshme. Është e qartë se $\{5, 12\}$ dhe $\{12, 5\}$ nuk janë objekte të njëjtë. Për dallim nga bashkësia, shënimi $(5, 12)$ nuk është i barabartë me $(12, 5)$ sepse varet nga renditja. Për këtë shënim përdorim konceptin çift i renditur. Ç'është çifti i renditur?



Çift i renditur elementesh është çifti i dy elementeve për të cilët saktësisht dihet se cili është i pari e cili është elementi i dytë.

Çifti i renditur i dy elementeve a dhe b , për të cilin a është element i parë, kurse b element i dytë shënohet me (a, b) . Në shënimin e tillë a është elementi i parë ose komponenti i parë, kurse b elementi i dytë ose komponenti i dytë i çiftit të renditur.

Detyra 2

A janë të barabarta çiftet e renditura $(1, 2)$ dhe $(2, 1)$? Shpjegoni përgjigjen. Dy çifte të renditura kur do të ishin të barabartë?

Dy çifte të renditura (a, b) dhe (c, d) janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse $a = c$ dhe $b = d$. Në çiftin e renditur (a, b) lejohet që $a = b$, përkatësisht edhe (a, a) është çift i renditur. Çifti i renditur (a, b) për $a \neq b$ nuk është njëloj sikurse bashkësia $\{a, b\}$, kurse çifti i renditur $\{a, a\}$ nuk është njëloj si bashkësia $\{a\}$.

Detyra 3

Shkruani çifte të renditura përmes shembujve nga përditshmëria.

Shembulli 3

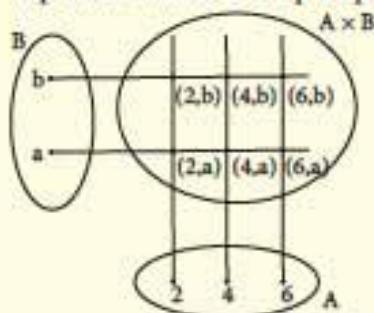
Janë dhënë dy bashkësi $A = \{2, 4, 6\}$ dhe $B = \{a, b\}$. Shkruani bashkësinë elementet e së cilës janë gjitha çiftet e renditura, të tilla që elementi i parë i secilit çift të renditur është nga bashkësia A , kurse elementi i dytë është nga bashkësia B .

Zgjidhje:

Secilin element të bashkësisë A e shkruajmë bashkë me secilin element të bashkësisë B . Kur elementi i parë është 2, i fitojmë çiftet e renditura $(2, a)$ dhe $(2, b)$, kur elementi i parë është 4, atëherë çiftet e renditura janë $(4, a)$ dhe $(4, b)$, kurse kur elementi i parë është 6, i fitojmë çiftet e renditura $(6, a)$ dhe $(6, b)$. Bashkësia e çifteve të renditura është $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$. Kjo bashkësi zakonisht shënohet me $A \times B$ dhe quhet produkti kartezian i bashkësive A dhe B . Për shënimin $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$ themi se është shënim tabelor i produktit kartezian të bashkësive A dhe B .

Për dy bashkësi A dhe B , bashkësia e gjitha çifteve, dysheve, të renditura në të cilët komponenti i parë është nga bashkësia A , kurse komponenti i dytë është element nga bashkësia B , quhet produkt kartezian i A me B , kurse e shënojmë me $A \times B$. Bashkësia $A \times B$ me simbole shkruhet si $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dhe } y \in B\}$.

Shpesh bashkësia $A \times B$ paraqitet me skemën karteziane të ilustruar në grafikun në vijim



Shembulli 4

Është dhënë bashkësia $A = \{1, 2, 3\}$. Caktoni gjitha çiftet e renditura që mund të formohen nga elementet e kësaj bashkësie.

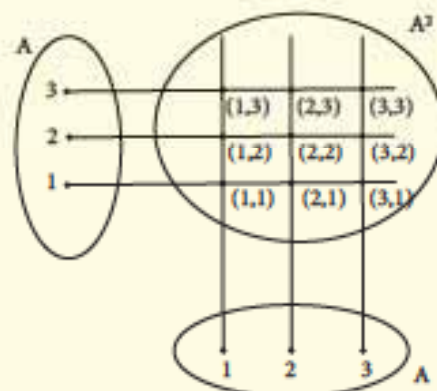
Zgjidhje:

Që të ndërtojmë çifte të renditura nga bashkësia A , do t'i kombinojmë elementet në çifte, ku renditja e elementeve do të ketë rëndësi. Çiftet e renditura të elementeve 1, 2, 3 janë: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3). Pra, P mund të shkruhet si:
 $P = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

Produkti kartezian $A \times A$ shpesh quhet edhe katror kartezian dhe shënohet me A^2 , përkatësisht

$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dhe } y \in A\}$.

Katrori kartezian mund të paraqitet me skemën karteziane si në figurë.



Detyra 4

Janë dhënë bashkësitë $K = \{21, 22, 23\}$ dhe $L = \{m, n, p, q\}$. Caktoni produktin kartezian $K \times L$:
 a) me tabelë, b) me skemën karteziane.

Detyra 5

Gjeni bashkësinë $A \times \emptyset$ për bashkësinë e çfarëdoshme A . Shpjegoni përgjigjen tuaj.

Detyra 6

Në mënyrë tabelore është dhënë produkti kartezian i bashkësive A dhe B , $A \times B = \{(7, 2), (7, 4), (7, 6), (9, 2), (9, 4), (9, 6)\}$. Caktoni, në mënyrë tabelore, bashkësitë A dhe B .

Shembulli 5

Në kuadër të projektit për zhvillimin e qëndrueshëm, nxënëset e klasës së shtatë vendosën që të përpilojnë një plan për organizimin e ekspozitës lokale të produkteve ekologjike. Për këtë qëllim, ato duan të hulumtojnë kategori të ndryshme të produkteve dhe veti të tyre, si për shembull:

bashkësia e produkteve: $A = \{\text{ushqim, veshje, lojëra}\}$,

bashkësia e materialeve: $B = \{\text{plastikë, masë drunore, tekstil}\}$.

Nxënëset duhet të caktojnë produktin $A \times B$ dhe ta paraqesin me skemë karteziane, me qëllim sqarimin shtesë të kuptimit të çifteve të renditura në kontekst të vetëdijes ekologjike.

Zgjidhje:

Për formimin e çifteve të renditura, nxënëset duhet të kombinojnë secilin lloj të produktit me secilin lloj materiali.

Për shembull, nga çiftet e renditura me ushqimin si element të parë:

(ushqim, plastikë) – ambalazh plastik për paketimin e ushqimit;

(ushqim, masë drunore) – kuti druri për ushqim;

(ushqim, tekstil) – qese tekstili për ushqim;

Veshja si element i parë i dyshes së renditur:

(veshje, plastikë) – prodhimi i cohës plastike për veshjen;

(veshje, masë drunore) – zbukurime me masë drunore për veshjen

(veshje, tekstil) – veshje nga tekstili ricikluar.

Për lojërat:

(lojëra, plastikë) – lojëra me material plastike;

(lojëra, masë drunore) – lojëra prej druri;

(lojëra, tekstil) – lojëra tekstili.

Shënimi i produktit kartezian $A \times B$ është: $A \times B = \{(\text{ushqim, plastikë}), (\text{ushqim, masë drunore}),$

$(\text{ushqim, tekstil}), (\text{veshje, plastikë}), (\text{veshje, masë drunore}), (\text{veshje, tekstil}), (\text{lojëra, plastikë}),$

$(\text{lojëra, masë drunore}), (\text{lojëra, tekstil})\}$

Mund të flitet për rëndësinë e secilit çift, secilës dyshe, për shembull: dyshja (ushqim, plastikë) mund të shihet si problematike sepse ambalazhi plastik është i dëmshëm për natyrën. Ç'mund të thoni për dyshen (ushqim, tekstil) ose dyshen (lojëra, masë drunore)?

Detyra 1

Mehmedi në laborator shqyrton kombinime të ndryshme të temperaturave dhe kohëve të ngrohjes së ujit. Ai ka në dispozicion dy bashkësi:

Bashkësia A: Temperaturat në gradë Celsius $\{10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\}$ dhe

Bashkësia B: Kohët e ngrohjes në minuta $\{5 \text{ min}, 10 \text{ min}, 15 \text{ min}\}$.

- Shkruani produktin kartezian të bashkësisë A me bashkësinë B.
- Cilat çifte të temperaturës dhe kohës japin rezultat më të mirë për ngrohjen e ujit? (temperaturat më të larta dhe koha më e gjatë e ngrohjes janë më të përshtatshme për ngrohjen më të mirë të ujit)

Si mund të përdorni kuptimin e çifteve të renditura dhe produktit kartezian në jetën reale, sidomos në situata ku duhet të kombinoni mundësi të ndryshme, siç është përzgjedhja e veshjes, planifikimi i shujtave ose organizimi i eventeve? Me shembuj shpjegoni përparësitë e mundshme të përdorimit të këtyre kuptimeve matematike në marrjen e vendimeve në përditshmërinë tonë.

Në fletoren tënde vizato një rreth. Në të shkruaj "Dituritë e mia për dyshet e renditura dhe produktin kartezian". Punën tënde vlerëso me ngjyra:

- Ngjyra e gjelbër: ndjej se atë çfarë e kam mësuar e kam kuptuar shkëlqyeshëm dhe mund ta përdor në mënyrë të pavarur.
- Ngjyra e verdhë: kam dije themelore, por më duhen akoma ushtrime.
- Ngjyra e kuqe: nuk jam i sigurt në dituritë e mia dhe duhet të punoj shtesë.

Lista e pyetjeve: Nën rreth shkruaj 2 – 3 pyetje për të cilat kërkon përgjigje ose çështje që dëshiron t'i hulumtosh në më shumë detaje.

Punë e pavarur

- Jepen bashkësitë: $A = \{a, b\}$ dhe $B = \{a, 6, 7\}$. Paraqitni në mënyrë tabelare produktet karteziane në vijim:
 - $A \times B$
 - $B \times A$
 - $A \times A$
 - $B \times B$
 - $(A \cap B) \times B$
 - $(B \setminus A) \times A$
 - $A \times (A \cup B)$
 - $A \times \emptyset$
- Nga cilat bashkësi janë fituar produktet karteziane në vijim:
 - $\{(2, 1), (2, 3), (5, 1), (5, 3)\}$
 - $\{(5, x), (x, 5), (5, 5), (x, x)\}$
- Jepen bashkësitë: $A = \{0, 2, 4\}$ dhe $B = \{3, 5\}$. Paraqitni në mënyrë tabelare, në mënyrë përshkruese dhe me skemë karteziane bashkësitë: a) $B \times A$, b) $A \times A$.
- * Jepen bashkësitë: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ dhe } 0 < x < 4\}$ dhe $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ dhe } 5 \leq y \leq 6\}$. Paraqitni bashkësitë e mëposhtme me tabelë dhe me skemë karteziane:
 - $P = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ dhe } x = y\}$, $M = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ dhe } x + y = 6\}$,
 $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ dhe } y - x = 2\}$
 - Cakto bashkësitë: $M \cap S$, $M \setminus S$, $M \cup S$ dhe $M \setminus (P \cup S)$.
- Jepen bashkësitë: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe $B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x + 2 = 4\}$.
 - Me tabelë dhe skemë karteziane paraqitni bashkësitë: $A \times B$, $B \times A$ dhe B^2 .
 - A vlen $A \times B = B \times A$? Shpjegoni përgjigjen.
- Shkruani gjitha nënbashkësitë e bashkësisë $\{(a, 5), (7, x), (4, 0)\}$.
 - Gjeni gjitha nënbashkësitë dylementeshe të bashkësisë $\{(1, x), (2, z), (y, x)\}$.

Numrat e plotë. Krahasimi dhe renditja

Në jetën e përditshme shpesh përdor numra për të matur ose për të përshkruar madhësi të ndryshme. Objektet më shpesh i numërojmë me numrat natyrorë, kurse thyesat dhe numrat dhjetorë ju ndihmojnë të shprehni pjesë të tërësisë (për shembull, gjysmë buke ose çerek kilogrami sheqer). Megjithatë, ekzistojnë situata kur këta numra nuk janë të mjaftueshëm që t'i përshkruani fenomenet përreth. Për shembull, kur temperatura zbret nën zero, kur dikush ka borxh para ose kur maten ndryshimet në lartësinë mbi dhe nën nivelin e detit. Në raste të tilla duhen numra që mund të paraqesin edhe humbje, mungesë ose "lëvizje" në kah të kundërt. Kështu i prezantojmë numrat e plotë. Përmes tyre mund të përshkruani dhe kuptoni më saktë koncepte të ndryshme matematike edhe në jetën reale.



Shembulli 1

- Shkruani, në mënyrë tabelore, bashkësinë e numrave të plotë.
- Përcaktoni nënbashkësinë e bashkësisë Z elementet e së cilës janë numrat e plotë pozitivë.
- Përcaktoni nënbashkësinë e bashkësisë Z elementet e së cilës janë numrat e plotë negativë.
- Çfarë lidhje ekziston ndërmjet bashkësive N , N_0 , Z^+ , Z^- dhe Z ?

Zgjidhje:

- Elementet e bashkësisë së numrave të plotë janë: numrat natyrorë, numrat e kundërt të tyre dhe zeroja, përkatësisht

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$
- $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$
- Lidhjet mes bashkësive N , N_0 , Z^+ , Z^- dhe Z mund të paraqiten edhe me operacionet mes bashkësive.
 Për shembull, $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$, $Z^+ = N$, $Z^+ \cup \{0\} = N_0$, $Z^+ \cap Z^- = \emptyset$, $Z \setminus Z^- = N_0$

Detyra 1

Caktoni bashkësitë:

- $Z^+ \setminus N$; b) $Z^+ \cap N$; c) $Z^+ \cap Z^-$; d) $Z \setminus N$; e) $Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ dh) $\{0\} \cup Z^+$.

Detyra 2

Renditni numrat: 11, -15, -34, 15, -11, 0, 20, -20 duke filluar nga më i vogli dhe paraqitni në boshtin numerik.

Për $a, b \in \mathbb{Z}$ themi se a është më i madh se b (ose se b është më i vogël se a), (shkruajmë $a > b$ ose $b < a$), nëse pika $A(a)$ është djathtas pikës $B(b)$ në boshtin numerik.

Shembulli 2

Si do të shkruanim nëse themi "Temperatura të paktën është -3°C "?

Zgjidhje:

Nëse themi "Temperatura të paktën është -3°C ", kjo nënkupton se temperatura mund të jetë -3°C ose më e lartë se kaq. Matematikisht, kjo shkruhet si: $T \geq -3^\circ\text{C}$.

"Të paktën" nënkupton se kjo është vlera më e vogël e mundshme, por mund të jetë edhe më shumë se kaq. Simboli " $\geq$ " (më i madh ose i barabartë) përdoret pasi temperatura mund të jetë -3°C ose cilado vlerë më e lartë se kaq (për shembull, 0°C , 5°C , 10°C e të ngjashme).

Shembull i ngjashëm: Nëse themi "Temperatura të shumtën është 10°C ", kjo nënkupton se ajo mund të jetë 10°C ose më pak, prandaj shkruajmë $T \leq 10^\circ\text{C}$.

Për $a, b \in \mathbb{Z}$, për të cilët $a = b$ ose $a > b$, shkruajmë $a \geq b$.

Për $a, b \in \mathbb{Z}$, për të cilët $a = b$ ose $a < b$, shkruajmë $a \leq b$.

Shembulli 3

Shfrytëzoni simbolet $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ për të shkruar relacione me numrat:

- a) 2 dhe 3 b) -4 dhe -3

Zgjidhje:

Është e vërtetë se $3 > 2$, por e vërtetë është gjithashtu se $3 \geq 2$ dhe $3 \geq 3$.

Gjithashtu është e vërtetë se $-4 < -3$, por edhe $-4 \leq -3$ dhe $-4 \leq -4$.

Detyra 3

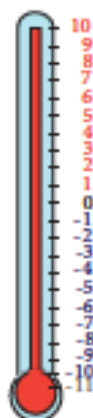
Në boshtin numerik:

- Shënoni me ngjyrë të kuqe tri pika koordinatat e së cilave janë më të vogla ose të barabarta me -3.
- Me ngjyrë të kaltër shënoni tri pika koordinatat e së cilave nuk janë më të vogla se 2.
- Me ngjyrë të gjelbër shënoni tri pika me koordinata më të mëdha ose të barabarta me 2. Çfarë vëreni?

Shembulli 5

Temperatura në disa qytet është:

- Në Shkup temperatura është 5°C .
- Në Tiranë temperatura është 2°C .
- Në Podgoricë temperatura është -3°C .
- Në Sarajevë temperatura është -5°C .
- Në Beograd temperatura është 0°C .
- Në Zagreb temperatura është -3°C .
- Në Athinë temperatura është 5°C .



- Cili qytet ka temperaturë më të lartë?
- Cili qytet ka temperaturë më të ulët?
- Sa është dallimi në temperaturë ndërmjet Shkupit dhe Sarajevës?
- Sa qytete kanë temperatura negative?
- Radhitni temperaturat e gjitha qyteteve duke përdorur simbolin $\leq$. Në çfarë rendi i shkruat numrat (rritës ose zvogëlues)?

Zgjidhje:

- Temperaturë më e lartë është regjistruar në Shkup dhe Athinë, 5°C .
- Temperatura më e ulët është regjistruar në Sarajevë, -5°C .
- Dallimi ndërmjet temperaturave është 10°C . Shpjegoni pse.
- Temperatura negative janë regjistruar në Podgoricë (-3°C), Sarajevë (-5°C) dhe Zagreb (-3°C).
- Temperaturat janë radhitur në rend rritës: $-5 \leq -3 \leq -3 \leq 0 \leq 2 \leq 5 \leq 5$.

Detyra 4

Markoja dhe shokët e tij dakordohen që të mbledhin para për mbathje sportive. Secili prej tyre ka vlera të ndryshme të borxhit dhe të ardhurave:

- Markoja ka borxh 50 denarë, të ardhura 100 denarë.
 - Ana ka borxh 30 denarë, të ardhura 80 denarë.
 - Nikolla ka borxh 20 denarë, të ardhura 120 denarë.
 - Tea ka borxh 40 denarë, të ardhura 90 denarë.
 - Fatima ka borxh 10 denarë, të ardhura 70 denarë.
- Duke shfrytëzuar numrat e plotë, shkruani borxhin dhe të ardhurat e Markos dhe secilit shok të tij. Renditni në varg zvogëlues numrat e fituar të plotë.
 - Cili prej tyre ka borxh më të madh?
 - Cili prej tyre ka të ardhura më të mëdha?
 - Cili prej tyre ka dallim më të madh ndërmjet të ardhurave dhe borxhit?
 - Shkruani si numër të plotë negativ borxhin e përgjithshëm të të gjithë shokëve.

Si do të mund t'i shfrytëzoni numrat e plotë në jetën e përditshme? A mund të theksoni shembuj nga dita aktuale nëse kenë hasur numra të plotë pozitivë dhe negativë ose krahasim të numrave të plotë?

Në fletoren tënde, përgjigju pyetjeve në vijim:

1. A kuptoj se ç'janë numrat e plotë dhe si ndahen ata në pozitivë, negativë dhe zero? Po/Jo
2. A mundem në mënyrë të pavarur të shkruaj numra të plotë pozitivë dhe negativë? Po/Jo
3. A mundem të jap shembuj nga përditshmëria ku përdoren numrat e plotë? Po/Jo
4. A mund të shpjegoj lidhjen mes bashkësive N , N_0 , Z^+ , Z^- dhe Z ? Po/Jo
5. Pasi të jesh përgjigjur në pyetjet e mësipërme, në fletoren tënde, shkruaj një koment të shkurtër për atë se ku has vështirësi e ku qëndron mirë me materialin.

Punë e pavarur

1. Shkruani 12°C mbi zeron dhe 15°C nën zeron.
2. Përcaktoni bashkësitë:
a) $Z^+ \setminus Z$ b) $Z^+ \cap Z$ c) $Z^+ \cap Z^-$ d) $Z \setminus N$ e) $Z \setminus ((0) \cup Z^+)$ dh) $(0) \cup Z^+$
3. Në një ditë vere temperatura u mat të ishte 32°C . Më pas ndryshoi për 3°C . Sa ka qenë temperatura më vonë? Duke e shfrytëzuar boshtin numerik, shpjegoni përgjigjen tuaj.
4. Radhitni numrat 2, -5, -1, 0, 9, -100, sipas madhësisë, duke filluar nga më i vogli.
5. Duke përdorur simbolet $\in$ dhe $\notin$, shkruani elementet e bashkësisë $\{2; -1; 3\frac{1}{2}; 0; -55; 3, 01; \frac{4}{2}\}$ që i takojnë, gjegjësisht nuk i takojnë bashkësisë Z .
6. Jepet bashkësia $A = \{2, -6, 8, 12, 0, -10\}$. Në mënyrë tabelore shkruani bashkësitë:
 $B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \text{ është numër i plotë pozitiv}\}$, $C = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \text{ është numër i plotë negativ}\}$ dhe
 $D = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \text{ nuk është as numër i plotë pozitiv as numër i plotë negativ}\}$.
7. Cili pohim është i saktë?
a) $N_0 \subset Z$ b) $Z^- \cap Z^+ = \{0\}$
8. Temperaturat e regjistruara në disa qytete të Republikës së Maqedonisë së Veriut janë paraqitur në tabelë. Në cilat qytete temperatura është shprehur me numra të plotë pozitivë e në cilët me numra të plotë negativë?

Temperatura nëpër qytete

Qyteti	Temperatura
Shkup	3°C
Manastir	-6°C
Ohër	5°C
Veles	0°C
Strumicë	7°C
Prilep	-4°C

9. Përmes simboleve + dhe - shkruani:
- temperaturën 11°C nën zero;
 - temperaturën 7°C mbi zero;
 - humbje prej 5000 eurosh.
10. Çështje e saktë?
- $3 \in \mathbb{N}_0$
 - $0 \in \mathbb{Z}^-$
 - $-22 \in \mathbb{Z}$
 - $0 \in \mathbb{N}$
11. Caktoni rezultatin e operacioneve të dhëna duke shfrytëzuar bashkësitë $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\emptyset$.
- $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$
 - $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^-$
 - $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^-$
12. Temperatura e regjistruar dje në orën 13 ishte -3°C , kurse sot është -5°C . Sot apo dje temperatura është më e ulët?
13. Me ndihmën e boshtit numerik, krahasoni numrat:
- 2 dhe 5
 - 4 dhe 0
 - -5 dhe 0
 - 2 dhe -6
 - -1 dhe -2 .
14. Në fletore, përshkruani detyrën dhe rrethoni pohimet e sakta:
- $-116 < +4$
 - $0 > 433$
 - $-34 > 0$
 - $-200 < -199$.
15. Radhitni numrat -4 , 0 , -49 , 32 , 15 , -5 dhe -50 , sipas madhësisë, duke filluar nga më i madhi.
16. Jepet bashkësia $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ dhe } -4 < x < 1\}$. Shkruani me tabelë bashkësitë: $B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x < -1\}$ dhe $C = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \geq -2\}$.
17. Temperatura ka ndryshuar nga -10°C në -4°C . Cila prej temperaturave të dhëna është më e lartë?
18. Radhitni numrat -15 , 45 , 13 , 0 , -34 , -31 dhe 14 sipas madhësisë, duke filluar nga më i vogli.
19. Duke shfrytëzuar simbolet $<$ ose $>$, krahasoni numrat:
- 0 dhe -234
 - -99 dhe -100
 - -14 dhe $+13$
 - $+21$ dhe -30

Vlera absolute

Në këtë njësi do të njihemi me kuptimin e vlerës absolute, e cila paraqet largësinë e një numri nga zeroja në boshtin numerik, pa marrë në konsideratë kahun. Ky koncept është i një rëndësie kritike për të kuptuar dallimin ndërmjet numrave të plotë pozitivë dhe atyre negativë, si dhe luan një rol të rëndësishëm në zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematike.

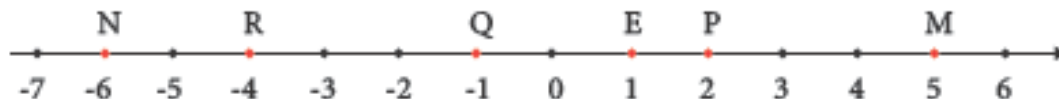


Rikujtoni:

1. Drejtëza p me pikat e përzgjedhura O dhe E , respektivisht segmentin njësi OE , bashkë me konceptet "majtas", "djathtas" (O është majtas E -së, kurse E është djathtas O -së), në të cilën me bartjen e segmentit njësi majtas dhe djathtas pikës O janë shënuar pafund shumë pika (të quajtura pika numra të plotë) të cilave u janë shoqëruar numrat e plotë (sikurse në vizatimin në shembullin 1) quhet drejtëz numerike (bosht numerik).
2. Me përzgjedhjen e pikave O dhe E , drejtëza numerike është kahëzuar. Kahu nga pika O te pika E , përkatësisht kahu në të djathtë, quhet kah pozitiv. Kahu i anasjellë, majtas, quhet kah negativ. Në gjysmëdrejtëzën OE janë vendosur numrat e plotë pozitivë, kurse në gjysmëdrejtëzën tjetër janë vendosur numrat e plotë negativë.
3. Për çdo pikë numër plotë H , numri i plotë a që i është shoqëruar asaj pike quhet koordinatë e po asaj pike. Shënojmë $H(a)$. Drejtëza numerike quhet edhe bosht koordinativ, kurse pika O quhet origjinë e boshtit koordinativ.

Shembulli 1

- a) Në vizatim janë dhënë pikat M , N , P , Q dhe R . Cilat janë koordinatat e tyre?



- b) Për secilën prej pikave M , N , P , Q dhe R shkruani se nga cila anë e pikës O qëndron si dhe në çfarë largësie prej saj është.

Zgjidhje:

- a) Pika M ka koordinatë 5, përkatësisht $M(5)$. Më tej $N(-6)$, $P(2)$, $Q(-1)$ dhe $R(-4)$.
- b) Pika M është nga ana e djathtë e pikës O dhe është në largësi prej 5 segmentesh njësi. Pika N është majtas pikës O dhe në largësi prej 6 segmentesh njësi. Më tej vazhdoni të shkruani të dhënat për pikat e mbetura P , Q dhe R .

Le të jetë $A(a)$ pikë e drejtëzës numerike. Atëherë:

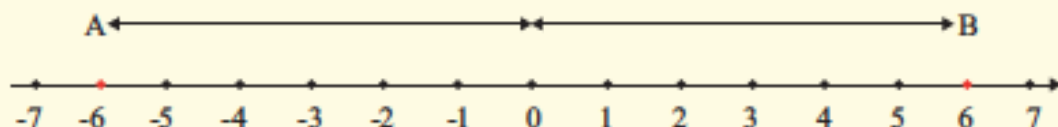
1. Nëse a është numër i plotë pozitiv, përkatësisht $a = n$, atëherë pika A është djathtas pikës O dhe largësia e saj nga O është e barabartë me n segmente njësi;
2. Nëse a është numër i plotë negativ, përkatësisht $a = -n$, atëherë pika A është majtas pikës O dhe largësia e saj nga O është e barabartë me n segmente njësi;
3. Nëse $a = 0$, atëherë pika A përputhet me pikën O .

Shembulli 2

Shqyrtoni pikat $A(-6)$ dhe $B(6)$ në drejtëzën numerike në vizatim. Çfarë vëreni?

Zgjidhje:

Ato janë simetrike në raport me pikën O , kurse koordinatat e tyre janë numrat e kundërt 6 dhe -6 . Po ashtu, ato janë njëlloj të larguara nga pika O , por njëra gjendet djathtas, kurse tjetra pikë gjendet majtas pikës O .



Largësia e secilës pikë numër plotë $A(a)$ me koordinatë a deri tek origjina O , pavarësisht nga fakti nëse A gjendet djathtas ose majtas pikës O , quhet vlerë absolute (ose modul) i numrit të plotë a dhe shënohet me $|a|$.

Për shembull:

$$|-35| = 35; |135| = 135; |-453| = 453; |0| = 0; |47| = 47.$$

Detyra 1

Gjeni vlerat absolute të numrave: 11, -15 , -34 , 15, -11 , 20 dhe -20 .

Për vlerat absolute të numrave të plotë vlejné vetitë në vijim.

Për çdo numër të plotë a :

1. $|-a| = |a|$;
2. $|a| = 0$ nëse dhe vetëm nëse $a = 0$;
3. $|a| \in \mathbb{N}_0$.

Detyra 2

Gjeni gjithë numrat e plotë a për të cilët: $|-a| = 3$; $|a| = 8$; $|a| = 0$.

Detyra 3

Le të jenë $a, b \in \mathbb{Z}$. Proveni saktësinë e pohimeve dhe sqaroni përgjigjen tuaj:

- Nëse $|a| > |b|$, atëherë $a > b$.
- Nëse $a > b$, atëherë $|a| > |b|$.
- Nëse $a < b$, atëherë $|a| < |b|$.

Detyra 4

Jepen pohimet:

- Çdo numër i plotë negativ është më i vogël se zero, kurse zero është më e vogël se çdo numër i plotë pozitiv.
- Çdo numër i plotë negativ është më i vogël se çdo numër i plotë pozitiv.
- Nuk ekziston numri më i vogël i plotë negativ dhe nuk ekziston numri më i madh i plotë pozitiv.
- Numri më i vogël pozitiv i plotë është -1 , kurse numri më i madh negativ i plotë është 1 .
- Ndërmjet çdo dy numrave të plotë ose nuk ka numër të plotë ose ka një sasi të fundme numrash të plotë.
- Për çdo dy numra të plotë të ndryshëm, njëri prej tyre është më i madh ose më i vogël se numri tjetër.
- Nëse kemi dy numra të plotë pozitivë atëherë më i madh është ai që ka vlerë më të madhe absolute, kurse nëse kemi dy numra të plotë negativ, atëherë më i vogël është ai që ka vlerë absolute më të madhe.
- Vlera absolute e çdo numri të plotë është numër më i madh ose i barabartë me zero.
- Një numër është pozitiv nëse është më i vogël se zero, kurse negativ nëse është më i madh se zero.
 - Cilat pohime janë të sakta?
 - Pohimet jo të sakta shkruani asisoj që të bëhen të sakta.

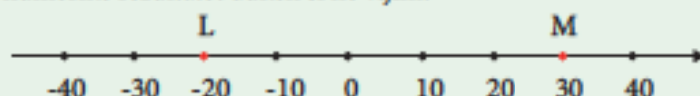
Shembulli 3

Maria dhe Lluka janë pjesëmarrës në një garë për mbledhjen e parave për një organizatë humanitare. Maria ka mbledhur 50 euro, por për materiale harxhoi 20 euro. Lluka, nga ana tjetër, arriti të mbledh 30 euro, por kishte harxhime në masën prej 50 eurosh.

- Cili prej tyre ka rezultat përfundimtar më të mirë?
- Si është vlera absolute e secilit prej rezultateve?

Zgjidhje:

- Nëse Maria ka grumbulluar 50 euro dhe ka harxhuar 20 euro për materiale, atëherë asaj i kanë ngelur edhe 30 euro çka nënkupton se ka rezultat pozitiv, $+30$ euro. Nëse Lluka ka grumbulluar 30 euro, kurse ka harxhuar për materiale 50 euro, atëherë ai ka rezultat negativ, -20 euro. Në drejtëzën numerike rezultatet duken si në vijim:



- Vlera absolute e rezultatit përfundimtar të Marisë është $|30| = 30$. Vlera absolute e rezultatit përfundimtar të Llukës është $|-20| = 20$.

Detyra 5

Imagjinoni se jetoni në një qytet ku temperaturat e dimrit mund të jenë shumë të ulëta. Për shembull: më 1 janar temperatura është -5°C , kurse më 2 janar temperatura është 3°C . Sa është largësia e temperaturës nga vlera zero në këto dy ditë?

Si mund t'i përdorni konceptet e vlerës absolute dhe renditjes së numrave të plotë në jetën reale? A mund të jepni shembuj nga sfera të ndryshme, sikurse është sporti, ekonomia ose shkencat, ku këto koncepte mund të ndihmojnë të merrni vendime ose t'i kuptoni të dhënat? Hulumtoni.

I. Përdorni shkallëzimin prej 1 deri 5 për të vlerësuar:

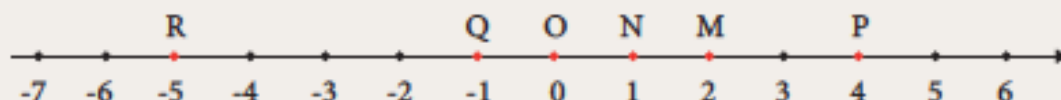
- 1: Nuk kuptoj fare.
- 2: Kuptoj pak, por kam shumë pyetje.
- 3: Kuptoj konceptet bazike, por nuk ndjem i sigurt në njohuritë e mia.
- 4: Kuptoj mirë, por mund të mësoj edhe më shumë.
- 5: I kuptova të gjitha dhe ndjem i sigurt në njohuritë e mia.

II. Në fletore përgjigju pyetjeve në vijim:

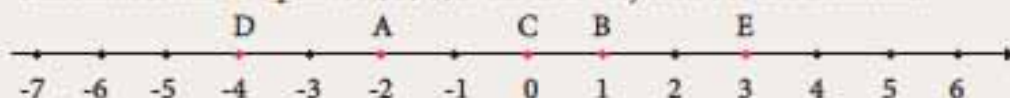
1. Cilat janë tri gjëra që mësova nga kjo njësi?
2. A arrita t'i përdor konceptet e vlerës absolute dhe renditjes së numrave të plotë?
3. A mund të jap shembuj?
4. Cila ishte pjesa më e vështirë për ta mësuar nga kjo njësi dhe pse?
5. Cilën pjesë të njësise do të doje ta sqaronim ose përsëritnim?

Punë e pavarur

1. Në drejtëzën numerike, caktoni numrat: $A(2)$, $B(-2)$, $C(4)$, $D(-6)$ dhe $E(5)$.
2. Çdo numri të plotë negativ dhe pozitiv a i përgjigjet një pikë në drejtëzën numerike? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
3. Pikat M, N; P, Q dhe R janë shënuar në drejtëzën e dhënë numerike. Cilat janë koordinatat e tyre?

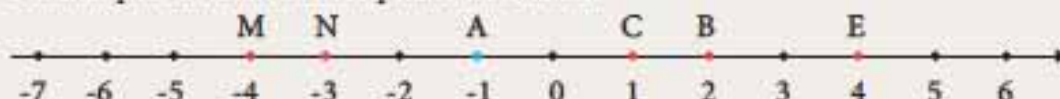


4. Caktoni koordinatat e pikave A, B, C, D dhe E në drejtëzën e dhënë numerike.



5. Me $K(-5)$, $N(-3)$, $G(+3)$ dhe $D(0)$ janë dhënë temperaturat e regjistruara në një ditë dimri në Kavadar, Negotinë, Gjevgjeli dhe Dellçevë. Vizatoni një drejtëz numerike dhe më pas, në të, paraqitni rezultatet e matjeve të temperaturës.

6. Në cilën pikë do të zhvendoset pika A nëse bartet:



- a) dy njësi majtas? b) tri njësi djathtas?

7. Duke përdorur drejtëzën numerike shkruani tre numra të njëpasnjëshëm të plotë që gjenden:
a) majtas numrit -2 b) djathtas numrit -1

- 8.* Jepen pikat $M(-3)$, $N(2)$ dhe $P(4)$. Gjeni koordinatat e pikave E dhe F që paraqesin meset e segmenteve MN dhe NP, përkatësisht, e më pas gjatësinë e segmentit EF.

9. Në drejtëzën numerike, pika A le të jetë dy njësi djathtas nga -1 . Caktoni pikën B e cila është në largësi 3 njësi nga pika A. Cilat koordinata mund t'i ketë pika B?

10. Pika $M(-1)$ është mes i segmentit AB. Gjeni koordinatën e pikës A nëse $B(2)$. Caktoni koordinatën e pikës A.

11. Plotësoni tabelat:

a)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$-a$							

b)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$ a $							

12. Gjeni gjithë numrat e plotë a për të cilët:

- a) $|-a| = 3$ b) $|a| = 8$ c) $|a| = 0$

13. Le të jetë $x \in \mathbb{Z}$. Çfarë numri është:

- a) $-x$, nëse x është negativ? b) x , nëse $-x$ është pozitiv?
c) $|x|$, nëse x është numër pozitiv?

- 14.* Zgjidhni barazimin $|x| = 10$.

Mbledhja e numrave të plotë me shenja të njëjta ose të ndryshme

Në jetën e përditshme hasim shpesh numrat pozitivë dhe negativë. Temperaturat mund të jenë mbi ose nën zero, transaksionet financiare mund të përfshijnë fitim ose humbje, kurse lartësitë mund të jenë mbi ose nën nivelin e detit. Në përditshmërinë tonë, llogaritjet me numrat e plotë gjithmonë janë të pranishme. Për llogaritjen e drejtë të vlerave të tilla, duhet të dini se si të mbledhni numrat e plotë, pa marrë parasysh kanë shenja të njëjta ose të ndryshme. Në këtë njësi do të mësoni si të mbledhni numrat e plotë, cilat rregulla duhet t'i ndiqni dhe si t'i zbatoni ato në situata reale. Me ushtrime dhe analizë të shembujve do të fitoni siguri në punën me numrat e plotë pozitivë e negativë.



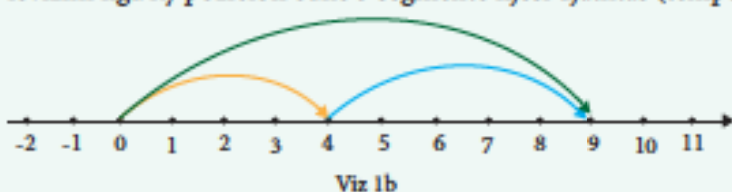
Shembulli 1

Temperatura e ajrit në orën 7 ishte 4°C mbi zero. Sa është temperatura në orën 14, nëse ajo deri atëherë është rritur për 5°C ?

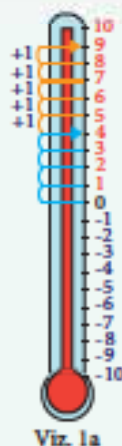
Zgjidhje:

Zgjidhja e detyrës është dhënë me vizatime (Viz. 1a, 1b).

Nëse e paraqesim në drejtëzën numerike, përgjigja do të dukej si edhe në termometër: për të paraqitur numrin $+4$ në drejtëzën numerike, lëvizim djathtas (në kahun pozitiv) 4 segmente njësi, kurse për të paraqitur rritjen për 5, lëvizim nga ky pozicion edhe 5 segmente njësi djathtas (temperatura rritet, viz. 1b)



Nga figura vërehet se $(+4) + (+5) = +9 = +(4+5) = +9$.



Detyra 1

Njehsoni:

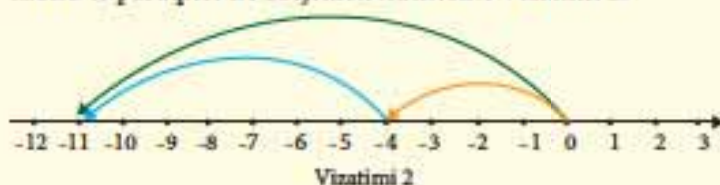
- a) $(+73) + (+29)$ b) $(+247) + (+113) + (+310)$

Shembulli 2

Në mesditën e një dite dimri temperatura e regjistruar ishte 4°C nën zero, kurse në mbrëmjen e asaj dite, deri ora 19, ajo u ul edhe për 7°C . Sa gradë celsius ka qenë temperatura ora 19?

Zgjidhje:

Në mesditë temperatura ka qenë 4°C nën zero (numër negativ -4°C), e më pas është ulur edhe për 7°C (përsëri vlerë negative -7°C). Kjo nënkupton se në ora 19 do të jetë edhe më ftohtë, përkatësisht temperatura në ora 19 do të jetë më e ulët se sa në mesditë edhe atë do të jetë 11°C nën zero, përkatësisht -11°C . Mund të themi se kemi mbledhur dy numra të plotë negativë. Këtu, rezultati i fituar i shumëzës së tyre gjithashtu është numër negativ i plotë. Edhe ky shembull mund të paraqitet në drejtëzën numerike Vizatimi 2.



Fillimisht, në drejtëzën numerike, lëvizim 4 segmente njësi majtas (në kahun negativ) nga zeroja dhe më pas, që të shtojmë numrin -7 , lëvizim edhe 7 segmente njësi majtas (përsëri në kahun negativ) në drejtëzën numerike, sikurse në vizatimin 2, prej ku vërejmë se $(-7) + (-4) = -(7 + 4) = -11$.

Nga shembujt 1 dhe 2 mund të përfundojmë:

Shuma e dy numrave të plotë me shenja të njëjta (të dy mbledhësit pozitivë ose të dy mbledhësit negativë) është numër i plotë vlera absolute e të cilit është shuma e vlerave absolute e të dy numrave (si shumë e numrave natyrorë), me shenjë të njëjtë (pozitive ose negative) sikurse shenjat e mbledhësve.

Detyra 2

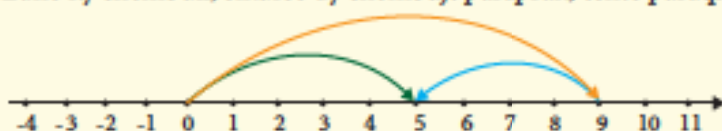
Njehsoni: a) $(+5970) + (+3730)$ b) $(-6100) + (-1370) + (-2806)$

Shembulli 3

- Temperatura në mesditë ishte 9°C mbi zero. Deri ora 20 ajo u ul për 4°C . Sa është temperatura në ora 20?
- Temperatura në mesditë ishte 9°C mbi zero. Deri ora 20 të mbrëmjes ajo u ul për 12°C . Sa është temperatura në orën 20?

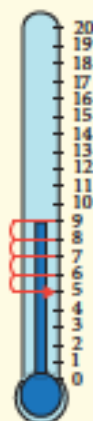
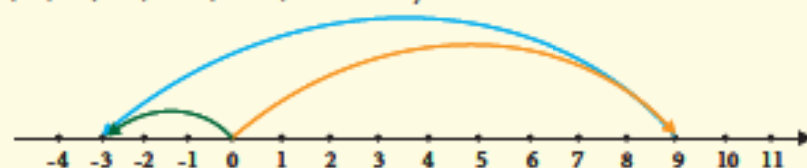
Zgjidhje:

a) Edhe ky shembull, sikurse dy shembujt paraprak, është paraqitur me vizatime.



Duke shfrytëzuar vizatimet me termometër dhe drejtëz numerike, sqaroni zgjidhjen: $(+9) + (-4) = +(9-4) = +5 = 5$. Ndryshimi në kllapa $9-4 \in \mathbb{N}$, sepse sikurse edhe mund të vërehet nga drejtëza numerike, në fakt, bëhet fjalë për largësinë nga njëra deri te pika (numri) tjetër, përkatësisht vlerave absolute. Këtu vetëm se ndryshon kahu i lëvizjes në varshmëri nga shenja e numrit (numër pozitiv ose negativ).

- b) Zgjidhjen do ta paraqesim vetëm me anë të drejtëzës numerike. Fillimisht e paraqesim mbledhësin e parë, përkatësisht lëvizim 9 segmente njësi djathtas për temperaturën $+9$, e më pas majtas, nga kjo pikë, për 12 segmente njësi. Kështu $(+9) + (-12) = -(12-9) = -3$. Ndryshimi $12-9 \in \mathbb{N}$. Pse?



Detyra 3

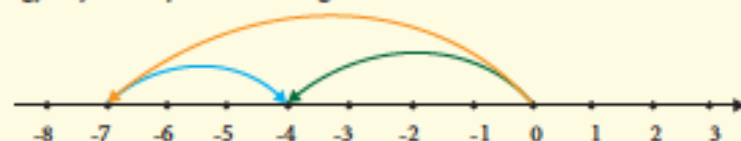
Njehsoni: a) $(+85) + (-30)$ b) $(+497) + (-589)$

Shembulli 4

- a) Temperatura në mëngjes të një dite dimri tregonte 7°C nën zero. Sa do të ishte temperatura në mesditë, po atë ditë, nëse ajo është rritur për 3°C ?
- b) Temperatura në mëngjes të një dite dimri tregonte 7°C nën zero. Sa do të ishte temperatura në mesditë, po atë ditë, nëse ajo është rritur për 11°C ?

Zgjidhje:

- a) Zgjidhja e detyrës është treguar në vizatimin e dhënë.



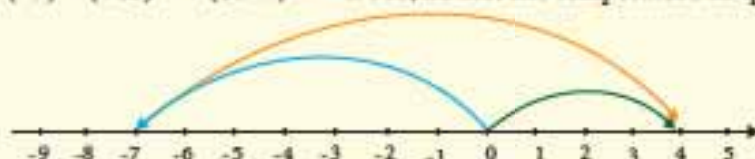
Duke filluar nga zeroja, në drejtëzën numerike lëvizim majtas për 7 segmente njësi pasi temperatura në mëngjes ka treguar 7°C nën zero, kurse më pas marrim djathtas 3 segmente njësi për shkak se temperatura është rritur për 3°C .

Kështu lexojmë se temperatura në mesditë ka qenë 4°C nën zero. Kjo mund të shkruhet edhe si në vijim:

$$(-7) + (+3) = -(7-3) = -4.$$

Ndryshimi $7-3 \in \mathbb{N}$. Shpjegoni pse?

- b) Edhe në këtë rast zgjidhja është treguar në drejtëzën numerike, ku në fillim lëvizim majtas 7 segmente njësi (për të regjistruar temperaturën -7°C), kurse më pas 11 segmente njësi djathtas (që regjistron rritjen e temperaturës për 11°C). Kështu fitojmë $(-7) + (+11) = + (11-7) = +4$. Pra, në mesditë temperatura ka qenë $+4^{\circ}\text{C}$.



Nga zgjidhjet e shembujve 3 dhe 4 mund të përfundojmë se:

Shuma e dy numrave të plotë me shenja të ndryshme (pozitiv dhe negativ ose negativ dhe pozitiv) është numër i plotë vlera absolute e të cilit është sa ndryshimi (si numra natyrorë) i vlerës më të madhe me vlerën më të vogël absolute të atyre numrave, kurse shenja e shumës është si shenja e numrit me vlerë më të madhe absolute.
Shuma e çdo numri të plotë me 0 dhe e 0 me cilindo numër të plotë është vetë numri i plotë.
Shuma e çdo numri të plotë me numrin e tij të kundërt është e barabartë me zero.

Detyra 4

Plotësoni tabelën:

a	26	-65	-182	200	1670	0	34
b	-12	19	243	-497	0	-195	-34
$a+b$							

Detyra 5

Temperatura në ora 14 ka qenë 6°C mbi zero. Nëse deri në ora 19 është ulur për 6°C , sa do të jetë temperatura në orën 19? Sqaroni përgjigjen tuaj duke përdorur drejtëzën numerike dhe si shumë e dy numrave të plotë. Çfarë mund të përfundoni?

Shenjat e mbledhësve	Simboli për shumën	Operacioni ndërmjet vlerave absolute të numrave	shembull
$\oplus + \oplus = \oplus$	+	mbledhje	$(+6) + (+4) = +10$
$\ominus + \ominus = \ominus$	-	mbledhje	$(-4) + (-6) = -10$
$\oplus + \ominus = \oplus$	+	Vendoset shenja e mbledhësit që ka vlerë absolute më të madhe	$(+6) + (-4) = +2$
$\ominus + \oplus = \ominus$	-	zbritje	$(+4) + (-6) = -2$

Shembulli 5

- a) Anita ka saldo negative në kartelën e saj për pagesa në vlerë prej 1200 denarë. Në llogarinë e saj u derdhën 5700 denarë. Pas shtimit të kësaj vlere, cila është gjendja në kartelën e saj?
- b) Milloshi ka saldo negative prej 1000 denarësh, por vazhdon të blejë në internet dhe harxhon akoma edhe 280 denarë. Cila është gjendja në kartelën e Milloshit pas blerjes në internet?
- c) Anita dhe Milloshi, së bashku, a kanë mjaftueshëm para për të blerë një dhuratë pre 3300 denarësh që e kishin përzgjedhur për Ilirin, një shok të tyre?

Zgjidhje:

- a) Për shkak të saldës negative në kartelën e Anitës, gjendja fillestare e saj është -1200 denarë. Pas derdhjes në të të mjeteve në shumën prej 5700 denarësh $(+5700)$ gjendja në kartelë është me sa vijon: $(-1200) + (+5700) = +4500$.
- b) Milloshi ka saldo negative prej 1000 denarësh dhe kësaj i shtohet edhe harxhimi i 280 denarëve, çka bën që gjendja në kartelën e tij të jetë $(-1000) + (-280) = -1280$ denarë.
- c) Që ta blejnë dhuratën, u nevojiten 3300 denarë, por ata së bashku kanë: $(+4500) + (-1280) = +3220$, çka nuk mjafton për këtë dhuratë. Anita dhe Milloshi a do të kishin mjaftueshëm para ta blinin dhuratën, nëse Milloshi paraprakisht nuk do të blinte në internet?

Detyra 6

Për shkak të veseve të këqija ushqyese dhe dietave të papërshtatshme, Pece kishte 6 kilogramë më pak se sa masa trupore e tij e zakonshme. Ai dëshironte të përmirësonte fizikun e tij dhe të kthehej në masën trupore të tij të zakonshme. Me ushqim të menduar mirë arriti të shtonte 7 kilogramë në masë. Cila është gjendja përfundimtare e masës së tij?

Detyra 7

Merita lëviz me ashensor në një ndërtesë shumëkatëshe.

- a) Ajo gjendet në parkingun nëntokësor në katin e shënuar me -2 dhe lëviz me ashensor për 6 kate lart. Në cilin kat do të arrij Merita me ashensor?
- b) Nëse ajo dëshiron që nga kati i 4 të zbret në parkingun nëntokësor të shënuar me -3 , sa kate duhet të lëviz Merita? Si shprehet kjo situatë me mbledhje të numrave të plotë?

Si ndryshon shuma nëse në vend se të mbledhësh vetëm numra pozitivë, shton edhe numra negativë? Si ndikon kjo në shumën përfundimtare?

Në fletoren tënde:

1. Shkruaj tri gjëra që mësove për mbledhjen e numrave të plotë me shenja të njëjta ose shenja të ndryshme.
2. Shkruaj një shembull nga jeta e përditshme ku mund të zbatosh këtë që ke mësuar.
3. Në shkallëzimin prej 1 deri 5, vlerëso se si ndjehesh: me vetëbesim për të kuptuarit e njësive (1 – aspak nuk kuptoj, 5 – plotësisht e kuptoj).
4. Shkruaj një pyetje që nuk e ke të qartë ose për të cilën do të dëshiroje të dish më shumë.

Punë e pavarur

1. Me anë të drejtëzës numerike njehsoni shumat:

- | | | | |
|--------------------|------------------|---------------------|----------------------|
| a) $(+2) + (+3)$ | b) $(-4) + (-2)$ | c) $(+3) + (-7)$ | ç) $(-5) + (+4)$ |
| d) $(+23) + (+32)$ | dh) $(+17) + 0$ | e) $(-140) + (-8)$ | ë) $0 + (-54)$ |
| f) $(-18) + (+23)$ | g) $(+2) + (-2)$ | gj) $(+51) + (-68)$ | h) $(-153) + (+153)$ |

2. Paraqitni numrin $+15$ si shumë të tre numrave të plotë pozitivë.

3. Paraqitni numrin -24 si shumë të dy numrave të plotë negativë.

4. Shkruani numrin -11 si shumë të dy numrave të plotë me shenja të ndryshme.

5. Shkruani numrin $+6$ si shumë të dy numrave të plotë me shenja të ndryshme.

6. Njehsoni:

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) $(-45) + (-13) + (-23)$ | b) $(+12) + ((+99) + (+1))$ | c) $(+41) + (+23) + (+87)$ |
| ç) $(-14) + (-21) + (-10) + (-15)$ | d) $(+22) + (-43) + (+1)$ | dh) $(+16) + (-31) + (+2)$ |
| e) $(-43) + (+41) + (+5)$ | ë) $(+7) + (-71) + (+15)$ | |

7. Mirkoja i ka borxh Anës 60 denarë, kurse Petrit i ka borxh 90 denarë. Sa para borxh ka gjithsej Mirko? Borxhin e tij shkruani si shprehje numerike me numra të plotë.

8. Biljana kishte në llogarinë rrjedhëse 1000 denarë. Ajo harxhoi 1200 denarë, kurse pas një kohe të caktuar në llogarinë e vet shtoi 3000 denarë. Sa denarë ka ajo në llogari?

9. Cili numër fitohet nëse shuma e numrave -45 dhe $+57$ mbledhet me shumën e numrave -2 dhe -16 ?

10. Temperatura e ajrit, e regjistruar gjatë mbrëmjes ishte -11°C , kurse natën ajo u ul për 5°C . Sa ka qenë temperatura pas uljes?

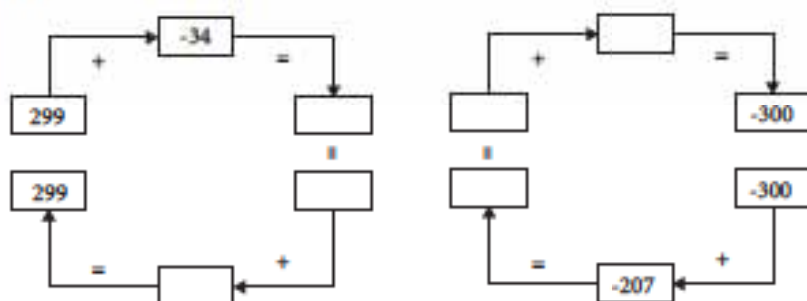
Veti të operacionit të mbledhjes së numrave të plotë

Mbledhja është një nga operacionet bazike matematike dhe luan rol kyç në jetën e përditshme. Nga blerja e produkteve në shitore e deri te matja e kohës ose e sasisë, mbledhja ndihmon që të organizoni dhe drejtoni burimet tuaja. Në këtë njësi do të mësoni për vetitë e mbledhjes, sikurse është vetia komutative (e ndërrimit) dhe vetia asociative (e shoqërimit), si dhe do të hulumtoni se si ato do të ndikojnë mbi mënyrën se si i zgjidhni problemet matematike. Me shembuj praktikë dhe aktivitete do t'i përdorni këto veti dhe do të kuptoni se si t'i shfrytëzoni në situata të ndryshme.



Shembulli 1

Plotësoni vendet e zbrazëta



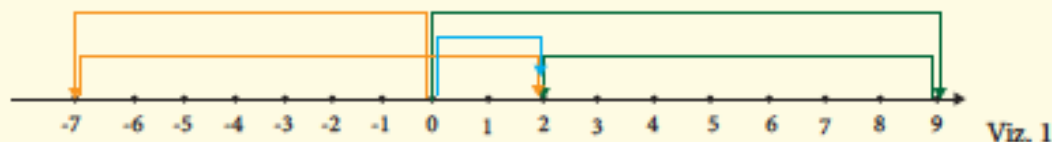
Udhëzim: Që të plotësoni fushat e zbrazëta të diagrameve, nëse keni nevojë, rikujtoni se si mbledhen numrat e plotë me shenja të njëjta ose me shenja të ndryshme nga njësia mësimore paraprake.

Shembulli 2

Njehsoni shumat: $9 + (-7)$ dhe $(-7) + 9$.

Zgjidhje:

Duke përdorur drejtëzën numerike në Viz. 1, ku janë shënuar që dy shumat $9 + (-7)$ dhe $(-7) + 9$, mund të përfundoni se $9 + (-7) = 9 - 7 = 2 = (-7) + 9$.



Shuma e dy numrave të plotë nuk ndryshon nëse mbledhësit ndërrojnë vendet, përkatësisht vlen ligji komutativ. Me fjalë të tjera,

Për çdo dy numra $a, b \in \mathbb{Z}$, vlen: $a + b = b + a$.

Detyra 1

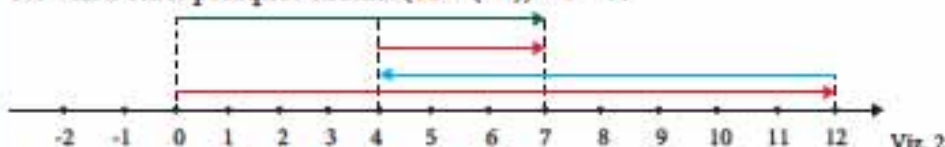
Kontrolloni saktësinë e barazimit: $a + b = b + a$ për numrat:

- a) $a = 81, b = -5$; b) $a = -3540, b = 3075$; c) $a = 220, b = -220$.

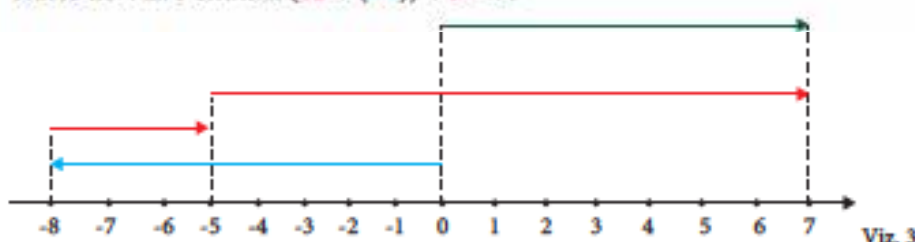
Shembulli 3

Njihsoni shumat $(12 + (-8)) + 3$ dhe $12 + ((-8) + 3)$.

Në Viz. 2 është paraqitur shuma: $(12 + (-8)) + 3 = 7$.



Kurse në Viz. 3 shuma: $(12 + (-8)) + 3 = 7$.



Nga barazia e koordinatave përkatëse del se të dy shumat janë të barabarta, përkatësisht: $(12 + (-8)) + 3 = 12 + ((-8) + 3)$.

Për çdo tre numra të plotë $a, b, c \in \mathbb{Z}$, të dy shumat $(a + b) + c$ dhe $a + (b + c)$ janë të barabarta, përkatësisht $(a + b) + c = a + (b + c)$.

E thënë me fjalë të tjera, shuma e tre numrave të plotë nuk varet nga mënyra e grupimit të tyre, përkatësisht për mbledhjen e numrave të plotë vlen ligji asociativ. Prandaj, në vend të $(a + b) + c$ ose $a + (b + c)$ do të shkruajmë vetëm $a + b + c$. Në mënyrë të njëjtë do të shkruajmë $a + b + c + d$, $a + b + c + d + e$ dhe kështu me radhë. Shuma e një numri të fundëm numrash të plotë nuk varet nga mënyra e grupimit të tyre.

Detyra 2

Në mënyrën më të thjeshtë njihsoni shumat:

- a) $7300 + (-4900) + (-2300) + 900$ b) $1600 + (-9600) + (-1600) + 4600$

Shembulli 4

Në stacionin fillestar të një autobusi të trafikut urban janë ngjitur 17 udhëtarë. Në stacionin e parë të radhës janë ngjitur 10 udhëtarë, kurse 3 kanë zbritur. Në stacionin e dytë janë ngjitur 7 kurse kanë zbritur 5 udhëtarë dhe në stacionin e tretë me radhë janë ngjitur 4 kurse kanë zbritur 12 udhëtarë. Sa udhëtarë ka pasur në autobus pas stacionit të tretë?

Zgjidhje:

Në stacionin fillestar në një autobus të trafikut urban janë ngjitur 17 udhëtarë. Në stacionin e parë të radhës janë ngjitur 10 dhe kanë zbritur 3 udhëtarë. Kështu, numri i ri i udhëtarëve në autobus pas stacionit të parë është: $17 + 10 - 3 = 27 - 3 = 24$.

Në stacionin e dytë janë ngjitur 7, kurse kanë zbritur 5 udhëtarë. Kështu, numri i udhëtarëve pas stacionit të dytë është: $24 + 7 - 5 = 26$.

Në stacionin e tretë janë ngjitur 4, kurse kanë zbritur 12 udhëtarë. Kështu, numri i udhëtarëve pas stacionit të tretë është: $26 + 4 - 12 = 18$.

Pra, në autobus pas stacionit të tretë ka pasur 18 udhëtarë.

Shembulli 5

Petri, Ana dhe Borisi kanë fituar pikë në një lojë matematikore. Petri kishte -7 pikë, Ana kishte $+12$ pikë, kurse Borisi -5 pikë. Ata duan të llogaritin sa gjithsej pikë kanë së bashku, por secili llogariti në mënyra të ndryshme.

- a) Petri shkroi $(-7) + (+12) + (-5)$, Ana shkroi $(+12) + (-7) + (-5)$ dhe Borisi $(-5) + (-7) + (+12)$.
Sa ka fituar secili prej tyre? Cila veti është përdorur?
- b) Përdorni vetinë asociative për të llogaritur shumën.

Zgjidhje:

a) Mund të vëreni se secili prej tyre fillimisht ka shkruar numrin e pikëve të veta si mbledhës të parë dhe secili ka fituar: Petri $(-7) + (+12) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$; Ana $(+12) + (-7) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$ dhe Borisi $(-5) + (-7) + (+12) = (-12) + (+12) = 0$. Pasi secili në vende të ndryshme i ka shkruar mbledhësit, kjo nënkupton se është përdorur vetia komutative e mbledhjes së numrave të plotë. Numri i përgjithshëm i pikëve të fituara është i njëjtë në çdo rast dhe është 0.

b) Me përdorimin e vetisë asociative mbledhësit mund të grupohen në mënyra të ndryshme: $(-7 + (-5)) + 12$, $(-7) + ((-5) + (+12))$, $(-7 + (+12)) + (-5)$ dhe, përsëri, numri i përgjithshëm i pikëve të fituara është 0. Pa marrë parasysh radhën (komutativiteti) ose mënyrën e grupimit (asociativitetin), rezultati mbetet 0. Pra, lojtarët nuk kanë as fitim, e as humbje pikësh!

Detyra 3

Shkruani një varg me gjashtë numra të plotë, anëtar i parë i të cilit është 11, kurse secili anëtar i radhës fitohet duke i shtuar numrin -5 anëtarit pararendës. Secilin anëtar të ardhshëm e njehsoni në dy mënyra. Cilën veti do ta përdorni?

Kur mbledhni dy numra negativë, si do të jetë rezultati përfundimtar? A do të fitoni numër më të madh negativ apo rezultati përfundimtar do të jetë më i vogël nga mbledhësit, përkatësisht? Sqaroni përgjigjen tuaj me anë të shembujve. Mendoni edhe mbi ndikimin që vetia komutative dhe asociative kanë mbi mbledhjen e numrave të plotë. Si mund t'i përdorni këto veti në aktivitetet e juaja ditore?

Përgjigju, në fletoren tënde, pyetjeve në vijim:

1. Çfarë mësova sot?
2. Cilat pjesë të njësise mësimore ishin më të kuptueshme për mua?
3. Në cilat pika kisha vështirësi?

Në shkallëzimin nga 1 deri 5, vlerëso veten sa sukses kishe në zotërimin e njësise mësimore.

- 1 - Nuk e kuptova fare
- 2 - E kuptova pjesërisht
- 3 - E kuptova, por kam nevojë për ndihmë shtesë
- 4 - E kuptova dhe mund ta përdor
- 5 - E kuptova plotësisht dhe mund edhe t'ia mësoj dikujt tjetër

Shkruaj një ose dy hapa që mund t'i bësh për të përmirësuar dijet tua për njësine mësimore, nëse është e nevojshme.

Punë e pavarur

1. Nëse $(-199) + (+101) = -98$, atëherë sa është $(+101) + (-199)$?
2. Tregoni se është i saktë barazimi $a + b = b + a$, për $a = -54$, $b = -15$.
3. Cili numër duhet të qëndrojë në vend të x ashtu që të jetë e saktë barazia:
 $((-32) + (+17)) + (-20) = (-32) + (x + (-20))$?
4. Shkruani vetinë asociative të operacionit të mbledhjes së numrave të plotë, e më pas kontrolloni saktësinë e të njëjtës për numrat -14 , $+11$ dhe -10 .
5. Njehsoni vlerën e shprehjes duke shfrytëzuar vetinë komutative dhe asociative:
 $(-3) + (-2) + 0 + (+1) + (+2) + (+3) + (+4)$.
6. Cili numër duhet të qëndrojë në vend të $*$? Cilën veti e përdorët?
 a) $(-23) + (+17) = (+17) + *$ b) $(-217) + * = (-15) + (-217)$
7. Nëse dihet se $((-16) + (+11)) + (-30) = -35$, atëherë sa është $(-16) + ((+11) + (-30))$?
8. Le të jetë $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$. Duke shfrytëzuar vetitë e operacionit të mbledhjes së numrave të plotë, njehsoni shumën e elementeve të bashkësisë A .

Ekuacionet e llojit $x + a = b$. Zbritja e numrave të plotë

Sot do të mësoni për konceptet bazike të ekucionit të llojit $x + a = b$ që janë pjesë e rëndësishme e zgjidhjes së problemeve matematike. Ky ekuacion na ndihmon të gjejmë vlerën e panjohur, që e shënojmë me x , kur janë të njohur numrat a dhe b . Në këtë proces do të mësoni si ta përdorni operacionin zbritje e numrave të plotë për të përcaktuar vlerën e x . Kur keni ekuacion të llojit $x + a = b$, qëllimi është ta izoloni ndryshoren x në njërin anë të ekuacionit. Për të arritur këtë, do të përdorni rregullat e zbritjes, që do të mundësojnë të gjeni zgjidhjen e ekuacionit.



Kjo njësi mësimore jo vetëm që do t'u ndihmojë të kuptoni se si funksionojnë ekuacionet, por edhe se si të përdorni operacionet matematike në jetën e përditshme.

Shembulli 1

Zgjidhni ekuacionin $x + 36 = 44$ në $\mathbb{Z}$.

Zgjidhje:

Pasi x është mbledhësi i panjohur, ai është i barabartë me ndryshimin e shumës dhe të mbledhësit të njohur, përkatësisht $x = 44 - 36$ ose $x = 8$.

Prova: $8 + 36 = 44$.

Çka ndodh me këto koncepte në bashkësinë e numrave të plotë?

Shembulli 2

Zgjidhni ekuacionin $x + 17 = 11$ në bashkësinë e numrave të plotë.

Zgjidhje:

Këtë ekuacion do ta zgjidhim duke shtuar numrin -17 në të dy anët e ekuacionit. Kështu $x + 17 + (-17) = 11 + (-17)$, përkatësisht $x + 0 = -(17 - 11)$. Do të thotë se $x = -6$.

Për $a, b \in \mathbb{Z}$, çdo ekuacion i formës $x + a = b$ ka zgjidhje $x = b + (-a)$ në $\mathbb{Z}$.

Detyra 1

Zgjidhni në bashkësinë $\mathbb{Z}$ ekuacionet:

a) $x + (-53) = 108$ b) $x + 136 = 190$ c) $103 + x = -82$ ç) $-160 + x = 115$.

Zgjidhje të ekuacionit $x + a = b$ në $\mathbb{Z}$ e quajmë numrin e plotë që është sa ndryshimi i numrit b me a . Në mënyrë të njëjtë e përkufizojmë edhe ndryshimin e dy numrave të plotë, përkatësisht zbritjen në $\mathbb{Z}$.

Të zbresim një numër të plotë b me një numër tjetër të plotë a , nënkupton të zbritshmit t'i shtojmë numrin e kundërt të zbritësit. Për $a, b \in \mathbb{Z}$, e përkufizojmë ndryshimin $a - b$ si shuma $a + (-b)$.

Shembulli 3

Njehsoni: a) $54 - 38$ b) $(-48) - 23$ c) $139 - (-110)$ ç) $(-305) - (-227)$.

Zgjidhje:

a) $54 - 38 = \text{sipas përkufizimit të zbritjes së numrave të plotë} = 54 + (-38) = 16$

b) $(-48) - 23 = (-48) + (-23) = -71$ c) $139 - (-110) = 139 + (+110) = 249$

ç) $(-305) - (-227) = (-305) + (+227) = -78$.

Detyra 2

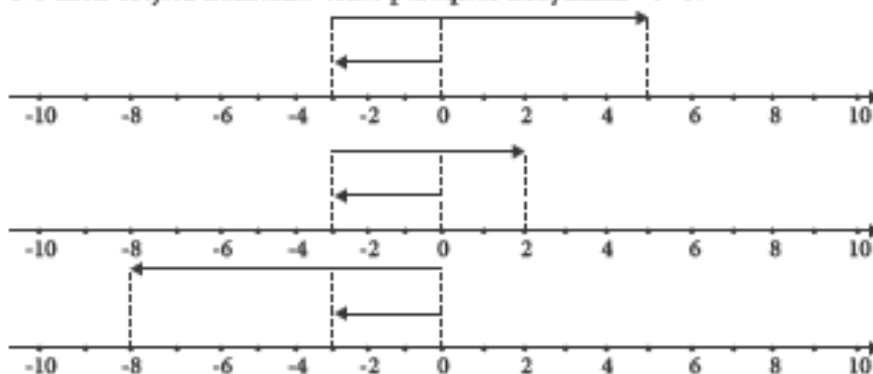
Sqaroni pohimin: Ndryshimi i dy numrave të çfarëdoshëm të plotë përsëri është numër i plotë.

Detyra 3

Njehsoni: a) $35 - 457$ b) $(-97) - 38$ c) $244 - (-310)$ ç) $(-125) - (-98)$.

Detyra 4

Në cilën drejtëz numerike është paraqitur ndryshimi $-3-5$:



Shembulli 4

Markoja kishte një shumë të caktuar parash. Ai bleu me kartelë dhe pas harxhimit të shumës prej 236 denarë vërejti se ishte në borxh ndaj bankës në shumën prej 43 denarë. Sa para kishte ai në fillim?

Zgjidhje:

Le të jetë x shuma e parave që Marku i kishte në fillim. Atëherë mund të vendosim ekuacionin:
 $x - 236 = -43$.

Që ta caktojmë të panjohurën, në dy anët e ekuacionit shtojmë numrin e kundërt të numrit -236 , përkatësisht 236, dhe kështu fitojmë ekuacionin $x - 236 + 236 = -43 + 236$, $x = 193$. Marku në fillim kishte 193 denarë.

Shembulli 5

- Jetoni kishte borxh 2300 denarë. Pas një kohe të caktuar ai arriti që ta zvogëlonte borxhin e tij për 1400 denarë. Si mund të shkruhet kjo situatë me anë të zbritjes së numrave të plotë? Edhe sa denarë i kanë ngeluar që të kthej gjithë borxhin?
- Jasna ka borxh prej 2300 denarësh dhe merr hua tjetër në vlerë prej 1420 denarë. Pas një kohe ajo arrin ta zvogëlojë borxhin për 3800 denarë. Si mund të shkruhet e gjithë kjo me anë të operacioneve me numra të plotë? Si është gjendja në llogarinë e Jasnës pas uljes së borxhit?

Zgjidhje:

- Sqaroni si fitohet shprehja numerike që i përgjigjet situatës së përshkruar të Jetonit
 $(-2300) - (-1400) = (-2300) + (+1400) = -900$. Kështu, Jetoni ka edhe 900 denarë borxh për të kthyer.
- $(-2300) + (-1420) + 3800 = (-3720) + (+3800) = +80$. Pra, Jasna nuk ka më borxh dhe ka 80 denarë në llogarinë e saj. Cila pjesë e shprehjes e përcakton borxhin e Jasnës pas huazimit shtesë? Sa ishte ai borxh?

Shembulli 6

Miteja kishte për detyrë që shumës së numrave 3792 dhe -4657 t'i shtonte ndryshimin e numrave -8461 dhe 4966. Kontrolloni saktësinë e zgjidhjes së tij dhe nëse ka nevojë, bëni korrigjimin e nevojshëm.

Zgjidhje:

Mitja fillimisht llogariti shumën e numrave 3792 dhe -4657 , përkatësisht
 $3792 + (-4657) = -865$. Pastaj e gjeti ndryshimin e numrave -8461 dhe 4966, përkatësisht
 $-8461 - 4966 = -8461 + (-4966) = -13427$.

Sipas kërkesës së detyrës, ai bëri mbledhjen e shumës së fituar të dy numrave të parë me ndryshimin e dy numrave të tjerë, përkatësisht $-865 + (-13427) = -14292$.

Detyra 5

Jovana ka 330 denarë saldo negative në llogarinë e saj bankare (përkatësisht është “në minus”). Ajo huazon edhe 48 denarë nga një shoqe e saj për të mbuluar ca harxhime. Më pas, vëllai i saj i kthen 470 denarë që i kishte pasur borxh më herët. Shkruani një shprehje numerike me mbledhje dhe zbritje numrash të plotë dhe caktoni vlerën e saj, për këtë rast. Sa denarë ka Jovana, në llogarinë e saj, pas gjitha këtyre ndryshimeve?

Detyra 6

Nga shuma e numrit më të vogël pozitiv dyshifrorë dhe numrit më të vogël negativ dyshifrorë zbritni ndryshimin e numrit më të vogël pozitiv treshifrorë me numrin më të madh negativ treshifrorë.

Si do ta zgjidhni ekuacionin $x + a = b$ në bashkësinë e numrave të plotë? Sqaroni pse zbritja e numrave të plotë mund të shkruhet si mbledhje me numrin e kundërt?

Në fletoren tënde, shkruaj!

A e kuptova njësinë mësimore? Vlerëso veten në shkallë nga 1 deri 5:

- 1: Nuk e kuptova fare.
- 2: E kuptova pak.
- 3: E kuptova, por nuk ndjehej i/e sigurt.
- 4: E kuptova mirë, mund edhe t’ua sqaroj të tjerëve.
- 5: E kam të qartë të gjithën, ndjehej si ekspert!

Pyetje për të menduar:

1. Cila ishte çështja më interesante që mësova?
2. Si t’i zbatoj dijet e fituara në jetën e përditshme?
3. A kam akoma pyetje ose çështje që nuk i kam të qarta?

Për çdo vlerësim me 4 ose 5, vizato një yll, “yllin e dijes”.

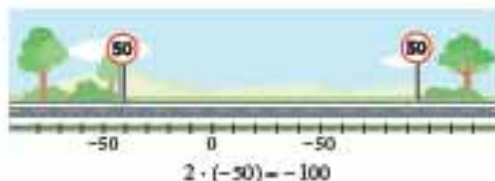
Vlerësimin tënd dhe një fakt interesant që ke mësuar mund ta ndash me shokët e tu të klasës.

Punë e pavarur

- Zgjidhni ekuacionin $x + 15 = 27$ me shtim, në dy anët e barazimit, të numrit të kundërt të numrit 15.
- Zgjidhni ekuacionet:
 - $x + (-34) = -29$
 - $(+32) + x = -8$
 - $x + (+11) = -33$
 - $(-76) + x = 5$
- Njehsoni:
 - $(+24) - (+25)$
 - $(-67) - (+60)$
 - $(+55) - (-5)$
 - $(-102) - (-2)$
 - $(+8) - (-13)$
 - $(-49) - (+11)$
 - $(-84) - (-10)$
 - $(-200) - (+10)$
- Zgjidhni ekuacionet:
 - $x - (+14) = -37$
 - $(-200) - x = -7$
 - $(+31) - x = +40$
 - $x - (-22) = -13$
- Nëse numrit -15 i shtohet një numër, atëherë fitohet ndryshimi mes numrave -7 dhe $+15$. Cili është ai numër?
- Nga ndryshimi i numrave -15 dhe $+10$ zbritni shumën e tyre.
- Cili numër duhet t'i shtohet shumës së numrave 88 dhe -52 që të fitohet shuma e numrave -44 dhe -52 ?

Shumëzimi i numrave të plotë

Në këtë njësi mësimore do të hulumtoni se si t'i shumëzoni numrat e plotë me shenja të njëjta dhe të ndryshme. Shumëzimi është operacion i rëndësishëm matematik që, jo vetëm se ndihmon në zgjidhjen e problemeve, por gjithashtu ndihmon zhvillimin e të menduarit logjik. Rregullat e shumëzimit të numrave të plotë me shenja të njëjta ose të ndryshme do të mundësojnë të kuptoni se si të zgjidhni probleme të ndryshme matematike lidhur me shumëzimin.



Pikërisht në këtë njësi mësimore do të punoni në probleme që do të mundësojnë të zbatoni këto rregulla dhe të fitoni sigurinë e nevojshme për aftësitë e juaja për punën me numra të plotë.

Shembulli 1

Njehsoni $(+72) \cdot (+9)$.

Zgjidhje:

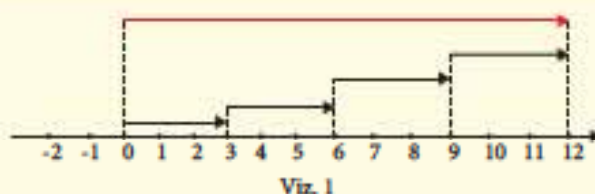
Meqenëse bashkësia e numrave të plotë pozitivë është e barabartë me bashkësinë e numrave natyrorë, përkatësisht $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, operacionin e shumëzimit në bashkësinë $\mathbb{N}$ e trajtojmë edhe si operacion të shumëzimit në $\mathbb{Z}^+$. Me fjalë të tjera, shumëzimi i numrave të plotë pozitivë është i njëjtë si shumëzimi i numrave natyrorë. Kështu: $(+72) \cdot (+9) = 72 \cdot 9 = 648$, sepse $+72 = 72$ dhe $+9 = 9$.

Shembulli 2

Vrojtoni lëvizjen e pikës nëpër drejtëzën numerike, nga e majta në të djathtë, ashtu që për çdo sekondë kalon tri njësi. Nëse në këtë moment pika gjendet në 0, atëherë ku do të jetë ajo pas 4 sekondash?

Zgjidhje:

Pasi që lëvizja nëpër drejtëzën numerike është djathtas (kahu pozitiv), pas 4 sekondash pika do të gjendet në numrin 12, përkatësisht $(+3) \cdot 4 = + (3 \cdot 4) = + 12 = 12$. Kjo është paraqitur në boshtin numerik në viz.1.



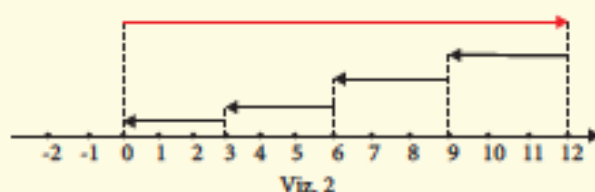
Viz. 1

Shembulli 3

Vrojtoni lëvizjen e pikës nëpër drejtëzën numerike, nga e djathta në të majtë, ashtu që për çdo sekondë kalon tri njësi. Nëse në këtë moment pika gjendet në 0, atëherë ku ka qenë ajo para 4 sekondash?

Zgjidhje:

Pasi që lëvizja nëpër drejtëzën numerike është majtas (kahu negativ), para 4 sekondash (koha e kaluar, kahu negativ) pika ka qenë në pjesën pozitive të boshtit numerik. Rezonojmë kështu: para 1 sekonde ka qenë 3 njësi djathtas; para dy sekondash ka qenë në $2 \cdot 3$ njësi djathtas; para 3 sekondash ka qenë $3 \cdot 3$ njësi djathtas, përkatësisht para 4 sekondash ka qenë në largësi $4 \cdot 3$ njësi djathtas, pra në numrin 12. Pasi lëvizja e pikës është 3 njësi për sekondë majtas ("−3 njësi"), kurse na kërkohet pozicioni i pikës para 4 sekondash ("−4 sekonda"), përfundojmë se produkti i këtyre dy numrave negativë $(-3) \cdot (-4) = + |3 \cdot 4| = + 12 = 12$. Kjo është paraqitur në boshtin numerik në viz.2. Produkti i dy numrave të plotë me shenja të njëjta është i barabartë me produktin e vlerave të tyre absolute (si numra natyrorë) me shenjë pozitive.



Viz. 2

Sipas shembullit 2 dhe shembullit 3, mund të themi:

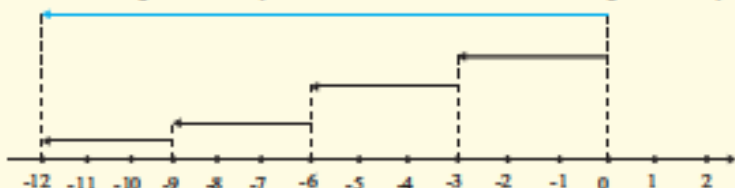
Për numrat $a, b \in \mathbb{Z}$, të dy pozitivë, përkatësisht të dy negativë, vlen $a \cdot b = |a| \cdot |b|$.

Shembulli 4

Vrojtoni lëvizjen e pikës nëpër drejtëzën numerike, nga e djathta në të majtë, ashtu që për çdo sekondë ajo kalon 3 njësi. Nëse tani ajo është në pikën 0, ku do të gjendet pas 4 sekondash?

Zgjidhje:

Në këtë rast lëvizja nëpër drejtëzën numerike është majtas (kahu negativ), kurse kërkohet pozicioni i pikës pas 4 sekondash (e ardhme, "koha pozitive"). Nga viz. 3 përfundojmë se pas 4 sekondash pika do të jetë në numrin -12 . Mund të përfundojmë se $(-3) \cdot 4 = -|3 \cdot 4| = -12$.

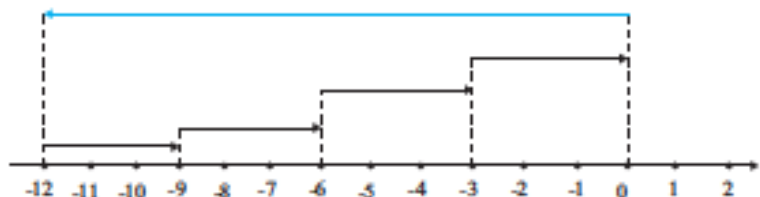


Viz. 3

Shembulli 5

Vrojtoni lëvizjen e pikës nëpër drejtëzën numerike, nga e majta në të djathtë, ashtu që për çdo sekondë ajo kalon 3 njësi. Nëse tani pika është në pikën 0, ku ka qenë para 4 sekondash?

Në këtë rast lëvizja nëpër drejtëzën numerike është djathtas (kahu pozitiv), kurse kërkohet pozicioni para 4 sekondash. Nga viz. 4 mund të përfundojmë se para 4 sekondash pika ka qenë në pozicionin e shënuar me numrin -12 . Mund të shkruajmë $3 \cdot (-4) = -|3 \cdot 4| = -12$.



Viz. 4

Nga zgjidhjet e shembullit 4 dhe shembullit 5 vërejmë se:

Produkti i dy numrave të plotë me shenja të ndryshme është numër negativ vlera absolute e të cilit është e barabartë me produktin e vlerave absolute të dy numrave (si produkt numrash natyrorë). Përkatësisht, për numrat $a, b \in \mathbb{Z}$, me shenja të ndryshme (njëri pozitiv, tjetri negativ), vlen $a \cdot b = -(|a| \cdot |b|)$.

Shenjat e shumëzuesve	Shenja e produktit	Operacioni mes vlerave absolute të shumëzuesve	shembull
$(+) \cdot (+)$	+	shumëzimi	$(+2) \cdot (+3) = +6$
$(-) \cdot (-)$	+		$(-2) \cdot (-3) = +6$
$(+) \cdot (-)$	-		$(+2) \cdot (-3) = -6$
$(-) \cdot (+)$	-		$(-2) \cdot (+3) = -6$

Detyra 1

Njehsoni produktet:

- a) $(+72) \cdot (+27)$ b) $(+108) \cdot (+49)$ c) $(-105) \cdot (-63)$ ç) $(-5086) \cdot (-309)$
d) $(+12) \cdot (-6)$ dh) $(-36) \cdot (+5)$ e) $(-256) \cdot (+28)$ ë) $(+408) \cdot (-105)$

Shembulli 6

Produktin e numrave -62 dhe $+806$ zvogëloni për numrin -2686 .

Zgjidhje:

Produkti i numrave -62 dhe $+806$ është $(-62) \cdot (+806) = -(|-62| \cdot |+806|) = -(62 \cdot 806) = -49972$. Produktin e fituar e zvogëlojmë për numrin -2686 dhe fitojmë me sa vijon:
 $-49972 - (-2686) = -47286$.

Shembulli 7

Në mesditën e një dite dimri temperatura e regjistruar ishte -7°C , kurse në mbrëmje të po asaj dite ishte 3 herë më e ulët. Sa ka qenë temperatura në mbrëmje?

Zgjidhje:

$(-7) \cdot 3 = -21$, pra temperatura në mbrëmje ka qenë -21°C .

Detyra 2

Daniela punon si projektuese në një ndërtesë të lartë, katet e së cilës janë shënuar me numra nga -3 deri 18 . Ajo duhet t'i rregullojë gjitha katet, prandaj lëviz me ashensor më shumë herë, lart e poshtë. Duke filluar nga kati i 10 , ajo zbret 3 herë nga 4 kate poshtë. Në cilin kat është Daniela pas këtyre lëvizjeve?

Si do ta sqaronit dallimin në lidhje me produktin e dy numrave të plotë pozitivë dhe produktin e një numri të plotë pozitiv dhe një numri të plotë negativ? Pse është e rëndësishme të kuptoni se si ndikojnë shenjat në rezultatin përfundimtar gjatë shumëzimit?

Në fletore bëj një tabelë me tri shtylla me tituj “Titulli i njësisë mësimore”, “Shkalla e të kuptuarit” dhe “Pyetje/Komente”.

Për titull të njësisë mësimore shkruaj “Shumëzimi i numrave të plotë”.

Në shtyllën e dytë vlerëso të kuptuarit e njësisë mësimore nga ana jote me njërin nga opsionet:

✓ E kuptoj shumë mirë

+ E kuptoj mirë

? Kam diçka të paqartë

X Nuk kuptoj.

Në shtyllën e tretë shkruaj të paktën një pyetje ose koment që ke në lidhje me temën. Kjo mund të jetë diçka që nuk e kupton, diçka me interes për ty ose ndonjë lidhje që ke bërë me rutinën ditore.

Në fund përgjigjet, e në veçanti pyetjet ose komentet mund t'i ndash me shokët e klasës. Kjo do të të ndihmojë në shkëmbimin e ideve dhe të kuptuarit edhe më të mirë të temës.

Punë e pavarur

- Në drejtëzën numerike, paraqitni produktin $(+3) \cdot (-2)$.
- Numrat $+15$ dhe $+3$ i shumëzojmë si në vijim:
 $(+15) \cdot (+3) = +(|+15| \cdot |+3|) = +(15 \cdot 3) = +45$.
 Në mënyrë të njëjtë, njehsoni $(-9) \cdot (-12)$.
- Njehsoni:
 a) $(+9) \cdot (+2)$ b) $(+21) \cdot (+31)$ c) $(-11) \cdot (-6)$ ç) $(-15) \cdot (-15)$ d) $(-11) \cdot (-18)$
- Cili numër duhet të qëndrojë në vend të *?
 a) $(-13) \cdot 0 = *$ b) $* \cdot (+456) = 0$ c) $(-237) \cdot 0 = *$
- Nëse një numri i shtojmë numrin $+37$, do të fitohet produkti i numrave -13 dhe -2 . Cili është ai numër?
- Gjeni produktin e numrave 1) $+3$ dhe -2 , 2) $+4$ dhe -2
 a) në drejtëzën numerike, b) duke shfrytëzuar vlerën absolute të numrave.
- Çfarë numri do të fitohet (pozitiv, negativ ose zero) nëse shumëzojmë:
 a) Një numër pozitiv dhe një numër negativ?
 b) Dy numra negativë dhe një numër pozitiv?
 c) Tre numra negativë dhe zero?
 ç) Tre numra negativë dhe dy numra pozitivë?

8. Krahasoni me anë të simboleve $<$, $>$ ose $=$

- a) $(-11) \cdot (+3)$ dhe 0 b) $(-12) \cdot (-4)$ dhe 0
c) $(-17) \cdot 0$ dhe 0 ç) $(+97) \cdot (-97)$ dhe 0.

9. Gjeni vlerën e $(-9) \cdot x$ për:

- a) $x = +14$ b) $x = +1$ c) $x = 0$ ç) $x = -1$

10. Shkruani si shumë produktin $(-4) \cdot (+5)$, e më pas llogaritni rezultatin.

11. Produktin e numrave -23 dhe 2 zvogëloni për ndryshimin e numrave -16 dhe $+14$ të shumëzuar me zero.

12. Shkruani shumën si produkt, e më pas llogaritni.

- a) $(-15) + (-15) + (-15) + (-15)$ b) $(-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7)$

13. Njehsoni:

- a) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$ b) $(-8) \cdot (-7) \cdot (-6) \cdot (+2) + (-4) \cdot (-3)$

Veti të operacionit të shumëzimit të numrave të plotë

Në këtë njësi mësimore do të njiheni me vetitë e operacionit të shumëzimit të numrave të plotë. Sikurse tashmë e dini, shumëzimi është një nga operacionet matematike bazike, e gjithashtu është edhe një nga operacionet që përdoret shpesh në jetën e përditshme. Pa dallim nëse punoni me numra të plotë pozitivë ose negativë, rregullat për shumëzimin janë të rëndësishme për zgjidhjen korrekte të detyrave matematike. Në këtë njësi do të hulumtoni vetitë e ndryshme të shumëzimit, sikurse është komutativiteti (vetia e ndërrimit), asociativiteti (vetia e shoqërimit) dhe distributiviteti (vetia e shpërndarjes) dhe si përdoren ato kur punojmë me numra të plotë. Do të mësoni si t'i përdorni këto veti për të lehtësuar llogaritjet.



Në fletoren tënde bëj një hartë ideore për vetitë që i di për shumëzimin e numrave natyrorë.

Për shumëzimin në $\mathbb{N}$ e di që ka vetinë komutative dhe asociative, e po ashtu edhe vetinë distributive ndaj mbledhjes, kështu që të njëjtat veti do të vlejnjë edhe për shumëzimin e numrave të plotë jonegativë. Këto veti a vlejnjë edhe për numrat e çfarëdoshëm të plotë?

Shembulli 1

Njehsoni produktin: $(-5) \cdot (-4)$ dhe $(-4) \cdot (-5)$ dhe më pas krahasoni rezultatet.

Zgjidhje:

Nga mënyra se si është përkufizuar shumëzimi fitojmë $(-5) \cdot (-4) = 20 = (-4) \cdot (-5)$.

Për çdo dy numra $a, b \in \mathbb{Z}$ vlen $a \cdot b = b \cdot a$, përkatësisht produkti i dy numrave të plotë nuk ndryshon nëse shumëzuesit i ndërrojnë vendet.

E thënë me fjalë të tjera, shumëzimi i numrave të plotë është operacion komutativ.

Detyra 1

Provoni vërtetësinë e barazimit $a \cdot b = b \cdot a$ për:

- a) $a = 352, b = -52$; b) $a = -589, b = 67$; c) $a = -2080, b = -84$.

Shembulli 2

Njehsoni produktet $[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9)$ dhe $(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)]$.

Zgjidhje:

$$[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9) = (-|43 \cdot 6|) \cdot (-9) = (-258) \cdot (-9) = |258 \cdot 9| = 2322.$$

$$(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)] = (-43) \cdot (-|6 \cdot 9|) = (-43) \cdot (-54) = |43 \cdot 54| = 2322.$$

Produktet janë të barabarta.

Për çdo tre numra $a, b, c \in \mathbb{Z}$ vlen $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, përkatësisht produkti i numrave të plotë nuk varet nga mënyra e grupimit të shumëzuesve.

E thënë me fjalë të tjera, shumëzimi i numrave të plotë është operacion asociativ.

Detyra 2

Provoni se vlen $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ për:

- a) $a = (-198), b = -50, c = 22$ b) $a = 115, b = -48, c = 75$.

Shembulli 3

Njehsoni: $(156 + 82) \cdot (-7)$ dhe $[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)]$. Çka vëreni?

Zgjidhje:

$$(156 + 82) \cdot (-7) = 238 \cdot (-7) = -|238 \cdot 7| = -1666;$$

$$[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)] = (-|156 \cdot 7|) + (-|82 \cdot 7|) = (-1092) + (-574) = -(1092 + 574) = -1666.$$

Mund të vërehet se vlerat e të dy shprehjeve numerike janë të barabarta.

Për çdo tre numra $a, b, c \in \mathbb{Z}$ vlejnjë barazimet:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ dhe } (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Për shkak të vetisë komutative të shumëzimit dhe mbledhjes, vlejnjë edhe:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \text{ dhe } c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$$

E thënë me fjalë të tjera, shumëzimi i numrave të plotë është distributiv ndaj mbledhjes dhe zbritjes së numrave të plotë.

Detyra 3

Për $a = -12$, $b = 40$, $c = -15$, $m = 25$, provoni saktësinë e barazimit:

$$(a + b - c) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m - c \cdot m$$

Shembulli 4

Një kompani e prodhimit të veshjeve dimërore ka humbje (kompania “është në minus”) gjatë muajve të dimrit. Në janar kompania ka humbje prej 3000 eurosh (“është në minus” 3000 euro), kurse humbja në shkurt është 2000 euro. Kompania vendos të bëjë llogari humbjet e përgjithshme për të dy muajt, por po ashtu dëshiron të llogarit edhe sa do të ishin humbjet në sezonin veror kur ato do të rriteshin për 3 herë në raport me muajt janar dhe shkurt bashkërisht. Llogaritni humbjet e përgjithshme të kompanisë në sezonin veror në dy mënyra.

Zgjidhje:

Mënyra 1) $((-3000) + (-2000)) \cdot 3 = (-5000) \cdot 3 = -15\,000$. Humbja e përgjithshme për dy muajt (janar dhe shkurt) është $(-3000) + (-2000) = -5000$, kurse për rritjen e pritshme të humbjeve për 3 herë fitohet $(-5000) \cdot 3 = -15\,000$ euro humbje e përgjithshme gjatë sezonit veror.

Mënyra 2) $((-3000) + (-2000)) \cdot 3 = (-3000) \cdot 3 + (-2000) \cdot 3 = (-9000) + (-6000) = -15\,000$
 $(-3000) \cdot 3 = -9000$ humbje që pritet në sezonin veror krahasuar me muajin janar,
 $(-2000) \cdot 3 = -6000$ humbje që pritet në sezonin veror krahasuar me muajin shkurt, prandaj humbja e përgjithshme që parashikohet në sezonin veror është $(-9000) + (-6000) = -15\,000$.

Detyra 4

Restoranti studentor ofron meny me çmime të leverdishme për studentët. Në meny përfshihen 3 byrekë dhe 2 gota lëng perimesh. Një student blen 4 meny të tilla, kurse një tjetër merr 12 byrekë dhe 8 lëngje perimesh. A kanë blerë numër të njëjtë produktesh të dy studentët?

Cila veti dhe si është përdorur ajo për të lehtësuar llogaritjen e shprehjes numerike

$$1997 \cdot (-4) = (2000 - 3) \cdot (-4) = 2000 \cdot (-4) - 3 \cdot (-4)?$$

Jepni shembuj në të cilët mund të përdoren vetitë për shumëzimin e numrave të plotë gjatë llogaritjes në situata konkrete nga jeta e përditshme,

Në fletoren tënde vizato rishtas tabelën dhe vendos njërën nga shenjat për secilën veti:

☒ – e kuptoj dhe mund ta shpjegoj, ? – jo gjithçka e kam të qartë ✗ – nuk e kuptoj.

Vetia komutative	Vetia asociative	Vetia distributive

Nën tabelë shkruani një shembull për vetinë/vetitë për të cilën/të cilat keni vënë shenjën ☒

Punë e pavarur

- a) Shkruani vetinë komutative të operacionit të shumëzimit të numrave të plotë.

b) Nëse $(-11) \cdot (+12) = -132$, atëherë sa është $(+12) \cdot (-11)$?
- Duke shfrytëzuar vetinë asociative, në barazimet e dhëna caktoni numrin që duhet të qëndrojë në vend të *.

a) $((-99) \cdot (+28)) \cdot (-14) = * \cdot ((+28) \cdot (-14))$

b) $(+19) \cdot ((* \cdot (-47)) = ((+19) \cdot (-38)) \cdot (-47)$
- Provoni vetinë asociative $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, nëse $a = -9$, $b = -4$, $c = -10$.
- a) Sa është x nëse $(-45 + x) \cdot (-2) = (-45) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2)$?

b) Nëse $(-18 + 8) \cdot (-3) = 30$, atëherë sa është $(-18) \cdot (-3) + (+8) \cdot (-3)$?
- Njehsoni në mënyrën më të lehtë $(+50) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot (+4)$
- Përdorni vetinë distributive dhe njehsoni:

a) $3 \cdot 11 + 3 \cdot 22$ b) $(-14) \cdot (-8) + (-14) \cdot (-2)$
- Njehsoni vlerën e shprehjes duke përdorur paraprakisht vetinë distributive:

$$4 \cdot (-8) + 2 \cdot (-8) + 5 \cdot (-8)$$

Pjesëtimi i numrave të plotë

Në përditshmëri shpesh na rastisin situata ku duhet të pjesëtojmë diçka në pjesë të barabarta. Për shembull, nëse keni 12 mollë dhe dëshironi t'i ndani barabar mes 4 shokësh, atëherë secili do të marrë nga 3 mollë. Ky është një shembull i thjeshtë për pjesëtimin në bashkësinë e numrave natyrorë. Por, ç'ndodh kur punojmë me numra të plotë të cilët ngërthejnë edhe numrat negativë? Në këtë njësi mësimore do të shqyrtoni se si funksionon pjesëtimi në bashkësinë e numrave të plotë, cilat janë rregullat për shenjat dhe si mund t'i zbatoni dijet mbi pjesëtimin në situata të ndryshme. Është me rëndësi të kuptoni se operacioni i pjesëtimit nuk është gjithmonë i realizueshëm në bashkësinë e numrave natyrorë, prandaj edhe në bashkësinë e numrave të plotë ka kufizime. Sikur që pjesëtimi në bashkësinë e numrave natyrorë (N) është përkufizuar përmes shumëzimit, mbi të njëjtin princip bazohet edhe pjesëtimi në bashkësinë e numrave të plotë (Z). Përmes kësaj njësie mësimore do të mësoni si të dalloni kur pjesëtimi është i realizueshëm e kur nuk është i tillë, do të mësoni si të caktoni herësin dhe si t'i përdorni drejtë operacionet me numra të plotë në shembuj praktikë.



Shembulli 1

Ana, Bojani dhe Viktori kanë mbledhur 168 fruta nga kopshti i frutave dhe kanë vendosur që t'i ndajnë në tri pako.

- Numri i frutave, në secilën prej tri pakove që duan t'i mbushin, a mund të jetë numër natyror?
- Sa fruta do të ketë në secilën pako?
- Nëse u bashkohen edhe dy shokë dhe duan të bëjnë pako për të pestët me numër të njëjtë frutash, atëherë a është i mundur pjesëtimi në bashkësinë e numrave natyrorë?

Zgjidhje:

- Për të provuar nëse të tre shokët do të marrin numër natyror të frutave, në fakt, duhet të kontrollojmë nëse numri 168 është i plotpjesëtueshëm me 3 dhe, sipas indicit për pjesëtueshmërinë me 3, kjo edhe ndodh. Pra, në secilën nga tri paket do të ketë numër të njëjtë të frutave.
- $168 \div 3 = 56$. Pra, nëse bëjnë tri pako, secila prej tyre do të ketë 56 fruta.
- Nëse u bashkohen edhe dy shokë, atëherë numri i pakove që duhet të bëjnë me numër të njëjtë frutash do të jetë 5. Numri 168 nuk është i plotpjesëtueshëm me 5. Pse? A fitojmë numër natyrorë gjatë pjesëtimit?

Pjesëtimi në bashkësinë e numrave natyrorë na mundëson të organizojmë objekte në grupe të njëjta. Në këtë rast, numri i frutave nëpër pako varet nga numri i personave që marrin pjesë në ndarje.

Le të jenë a, b dy numra të plotë ($a, b \in \mathbb{Z}$). Të pjesëtohet numri a me numrin b nënkupton të gjendet numri i plotë c (nëse ekziston një i tillë), i tillë që $b \cdot c = a$. Nëse një numër i tillë c ekziston, atëherë atë e quajmë herës, numrin a e quajmë i pjesëtueshmi, kurse numrin b e quajmë pjesëtues. Atëherë themi se b është pjesëtues i a dhe shkruajmë $b \mid a$.

Shembulli 2

Gjeni numrin e plotë x (nëse ekziston) për të cilin $12 \cdot x = 84$.

Zgjidhje:

Pjesëtojmë $84 : 12 = 7$.

Gjatë pjesëtimit të dy numrave të plotë kemi dy raste. Rasti i parë është kur edhe i pjesëtueshmi edhe pjesëtuesi kanë shenja të njëjta (të dy janë pozitivë ose të dy negativë). Rasti i dytë është kur i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi kanë shenja të ndryshme.

Shembulli 3

Të llogaritim numrin e panjohur në barazimin:

a) $8 \cdot x = 128$ b) $(-15) \cdot x = 165$

Zgjidhje:

a) Produkti i numrit 8 me numrin e panjohur është numër pozitiv. Për të fituar produkt pozitiv, të dy shumëzuesit duhet të jenë pozitivë ose të dy negativë. Pasi numri 8 është pozitiv, atëherë edhe numri i panjohur x është pozitiv.

$$x = |128 : 8| = 16, \text{ sepse } 16 \cdot 8 = 128.$$

b) Në barazimin $(-15) \cdot x = 165$ njëri shumëzues është negativ. Që produkti të jetë numër pozitiv, +165, shumëzuesi i dytë, numri i panjohur x duhet të jetë negativ.

$$x = 165 : (-15) = -|165 : 15| = -11, \text{ pasi } (-11) \cdot (-15) = + |11 \cdot 15| = + 165.$$

Vetia nga ky shembull formulohet edhe në rastin e përgjithshëm:

Herësi i dy numrave të plotë me shenja të njëjta, nëse ekziston në $\mathbb{Z}$, është numër pozitiv. Nëse $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ose $a, b \in \mathbb{Z}^-$ dhe $b \mid a$, atëherë: $a : b = |a| : |b|$.

Shembulli 4

Ta llogaritim numrin e panjohur x :

a) $(-13) \cdot x = -260$ b) $x \cdot 23 = -184$

a) Zgjidhja e kërkuar është numër pozitiv. Pasi produkti -260 është numër negativ, shumëzuesit duhet të jenë me shenja të ndryshme. Pasi -13 është negativ, atëherë x duhet të jetë numër pozitiv.

$$\text{Llogaritim: } x = (-260) : (-13) = |260 : 13| = 20.$$

$$\text{Prova: } (-13) \cdot (+20) = -260.$$

- b) Zgjidhja e barazimitë është numër negativ. Pasi produkti -184 është negativ, shumëzuesit duhet të jenë me shenja të ndryshme. Numri 23 është pozitiv, prandaj x duhet të jetë numër negativ,
 $x = (-184) : 23 = -|184 : 23| = -8$.
 Prova: $(-8) \cdot 23 = -184$.

Herësi i dy numrave të plotë me shenja të ndryshme, nëse ekziston në $\mathbb{Z}$, është numër negativ. Nëse $a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}^-$ ose $a \in \mathbb{Z}^-$, $b \in \mathbb{Z}^+$ dhe $b|a$, atëherë $a : b = -(|a| : |b|)$, ku pjesëtimi $|a| : |b|$ është pjesëtim i numrave natyrorë.

Shembulli 5

Gjeni numrin e plotë (nëse ekziston) për të cilin $7 \cdot x = 37$.

Zgjidhje:

Pasi numri 37 nuk mund të shkruhet si produkti i numrit 7 dhe i një numri tjetër të plotë, atëherë përfundojmë se një numër i tillë i plotë x nuk ekziston. Themi se ky pjesëtim nuk mund të realizohet në $\mathbb{Z}$.

Detyra 1

Njehsoni herësin:

- | | | | |
|----------------|--------------------|------------------|---------------------|
| a) $1248 : 24$ | b) $(-96) : (-8)$ | c) $2016 : 32$ | ç) $(-338) : (-26)$ |
| d) $(-80) : 5$ | dh) $1856 : (-29)$ | e) $(-364) : 14$ | ë) $2117 : (-73)$ |

Detyra 2

Nëse $a \in \mathbb{Z}$, sqaroni pse:

- | | | |
|-------------------------------|---|------------------------------------|
| a) $a : 1 = a$ | b) $a : 0$ nuk ekziston ose nuk ka kuptim | c) $a : (-1) = -a$ |
| ç) $a : a = 1$ për $a \neq 0$ | d) $0 : a = 0$ për $a \neq 0$ | dh) $a : (-a) = -1$ për $a \neq 0$ |

Shembulli 6

Një biznes, për shkak të kampanjës së pasuksesshme të reklamimit, pësoi humbje financiare prej 84000 denarësh. Kjo humbje, që mund të paraqitet si numër negativ (-84000) , është shpërndarë barabar ndërmjet 7 projektsh marketingu. Caktoni se nga sa denarë ka qenë humbja me secilin prej projekteve.

Zgjidhje:

Humbja është dhënë si numër negativ (-84000) , kurse numri i projekteve është pozitiv $(+7)$. Gjatë pjesëtimit të dy numrave të plotë me shenja të ndryshme, herësi do të jetë negativ.
 $x = (-84000) : 7 = -12000$

Prova: $(-12000) \cdot 7 = -84000$ është në pajtueshmëri me humbjen e nënvizuar.

Secili projekt marketingu sjell humbje prej $12\,000$ denarësh.

Detyra 3

Në një lojë Toma fitoi rezultat negativ prej -90 pikësh për shkak të kërcimeve jo të suksesshme. Nëse ky rezultat negativ shpërndahet barabar në 5 kërcime, atëherë caktoni sa pikë humbi Toma në secilin kërcim.

Ç'mendon, në ç'mënyrë të kuptuarit e drejtë i operacionit të pjesëtimit të numrave të plotë, veçanërisht kur punojmë me numra negativë, mund të na ndihmojë të marrim vendime më të qarta në jetën e përditshme, për shembull, gjatë shpërndarjes së harxhimeve ose burimeve materiale?

“Semafori matematik”

Në fletoren tënde:

- Vendos  të kuq (Kuptimi: Më duhet ndihmë!)
Shkruaj një pyetje ose pjesë që e ke më pak të qartë.
- Vendos  të verdhë (Kuptimi: Kuptoj pjesërisht, por kam ca dyshime!)
Shkruaj një problem që mund ta zgjidhësh dhe një që të shkakton probleme.
- Vendos  të gjelbër (Kuptimi: Kuptoj dhe mund t'i shpjegoj një shoku!)
Shkruaj një shembull tëndin për një problem me pjesëtim të numrave të plotë dhe zgjidhjen e tij.

Punë e pavarur

- Njehsoni:
a) $(+56) : (+8)$ b) $(-36) : (-12)$ c) $(+117) : (-1)$ ç) $(-585) : (-15)$ d) $(+54) : (-9)$
dh) $0 : (-12)$ e) $(+374) : (-1)$ ë) $(-148) : (+37)$ f) $(-32) : (+8)$ g) $(+200) : (-10)$
- Gjeni vlerën e y : 12 për: a) $y = 48$ b) $y = -156$
- Zgjidhni ekuacionet:
a) $(-88) : x = 8$ b) $(+45) \cdot x = -540$ c) $(-533) \cdot x = +41$ ç) $x \cdot (+79) = -790$
- Ndryshimin e numrave -27 dhe 9 pjesëtoni me shumën e tyre.
- Nëse ndonjë numër shumëzohet me -25 , do të fitohet produkti i numrave -8 dhe 21. Cili është ai numër?
- Biljana mendoi një numër. Kur e shumëzoi këtë numër me shumën e numrave -14 dhe 44, fitoi herësin e numrave -390 dhe 13. Cilin numër kishte menduar Biljana?
- Ç'mund të përfundojmë për të pjesëtueshmin dhe pjesëtuesin, numra të plotë, nëse:
a) herësi i tyre është $+1$, b) herësi i tyre është -1 , c) herësi i tyre është 0?
- Cili numër fitohet nëse herësi i numrave $+65$ dhe -13 zmadhohet për herësin e numrave -50 dhe -10 ?

Shpesh thuhet se dy shprehje numerike janë të barabarta nëse ato kanë vlera të barabarta numerike.

Shembulli 2

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes: $5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)]$

Zgjidhje:

$$5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - 48 : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - (-6)] = 5 \cdot [(-21) + (+6)] = 5 \cdot (-15) = -75$$

Gjatë llogaritjes së vlerës së shprehjes numerike duhet të kemi parasysh me sa vijon:

1. Operacionet mbledhje dhe zbritje quhen operacione të rendit të parë, kurse operacionet shumëzim dhe pjesëtim quhen operacione të rendit të dytë. Operacioni i fuqizimit shpesh quhet operacion i rendit të tretë.
2. Në shprehjet numerike pa kllapa, të përbëra vetëm nga operacionet e rendit të parë ose vetëm nga operacione të rendit të dytë, me marrëveshje, përparësi kanë operacionet që gjenden majtas, respektivisht operacionet kryhen sipas radhës së shënimit, nga majtas - djathtas.
3. Në shprehjet numerike pa kllapa, në të cilat paraqiten operacione të rendeve të ndryshme, me marrëveshje, përparësi kanë operacionet e rendit më të lartë, kurse operacionet e rendit të njëjtë kryhen sipas radhës si janë shkruar.
4. Në shprehjet numerike me kllapa, fillimisht llogaritet vlera e shprehjes në kllapa sipas 2 ose 3, e më pas në shprehjen e fituar pa kllapa përsëri i zbatohet rregullat 2 ose 3.

Shkurtimisht, radha e kryerjes së operacioneve në shprehjen e dhënë numerike është me sa vijon:

1. Operacionet në kllapa
2. Fuqizimi
3. Shumëzimi, pjesëtimi (nga majtas - djathtas)
4. Mbledhja, zbritja (nga majtas - djathtas)

Shembulli 3

Njehsoni: a) $(-24) - [48 : (-6)]$, b) $[(-24) - 48] : (-6)$ dhe c) $(-24) - 48 : (-6)$. Sqaroni se çka do të përdorni gjatë njehsimit.

Zgjidhje:

$$\begin{aligned} \text{a) } (-24) - [48 : (-6)] &= \text{llogaritet shprehja në kllapa, pjesa tjetër e mbetur e shprehjes përshkruhet} \\ &= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16 \end{aligned}$$

b) $[(-24) - 48] : (-6) =$ llogaritet shprehja në kllapa, pjesa tjetër e mbetur e shprehjes përshkruhet $= (-72) : (-6) = 12$

c) $(-24) - 48 : (-6) =$ përdoret përparësia e operacionit të rendit më të lartë, pjesa tjetër e shprehjes përshkruhet $= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16$

Çfarë mendoni, pse shprehjet $(-24) - [48 : (-6)]$, $(-24) - 48 : (-6)$ kanë vlerë të njëjtë numerike? Kllapat në shprehjen e parë a mund të shpërfillen dhe pse?

Detyra 2

Njihsoni vlerën e shprehjes numerike:

a) $(+23) + (-48) - (-79)$

b) $7 \cdot (-21) + 52 : (-13)$

c) $(-60) \cdot (-5) : 6 \cdot (-9)$

ç) $294 : [(-18) - (-15)] + (-47) \cdot 2$

d) $5 \cdot (-21) - [(-21) - (60-12) : (-8)]$

dh) $18 - 34 + 27 - 52 + 18 - 13$

Shembulli 4

Njihsoni: a) $(-15) + (-7)$ b) $(-15) - (-7)$ c) $-(-15) + (-7)$ ç) $+(-15) - (+7)$

Zgjidhje:

a) $(-15) + (-7) = -15 - 7 = -22$

b) $(-15) - (-7) = -15 + 7 = -8$

c) $-(-15) + (-7) = +15 - 7 = +8$

ç) $+(-15) - (+7) = -15 - 7 = -22$

Përpara njehsimit shprehjet numerike janë shkruar pa kllapa. Çka mund të vëreni?

$-(-a) = +a$ numri i kundërt i numrit $-a$ është numri $+a$

$-(+b) = -b$ numri i kundërt i numrit $+b$ është numri $-b$

Shembulli 5

Njihsoni vlerat e shprehjeve:

a) $(-14) + (-28) + (+40)$ b) $125 - (-49) - (+25)$

Zgjidhje:

a) $(-14) + (-28) + (+40) = -14 - 28 + 40 = -42 + 40 = -2$

b) $125 - (-49) - (+25) = 125 + 49 - 25 = 174 - 25 = 149$

Nëse para kllape, në një shprehje, qëndron shenja +, atëherë kjo shenjë dhe kllapa para së cilës është shenja largohen (fshihen), kurse gjithçka tjetër mbetet e njëjtë. Nëse para kllape, në një shprehje, qëndron shenja -, atëherë kjo shenjë dhe kllapa fshihen, kurse shenjat para numrave që ishin në kllapa ndryshohen në shenja të kundërta (nga + në - dhe nga - në +).

Detyra 3

Shumën e numrave (-62) dhe $(+130)$ shumëzoni me ndryshimin e tyre.

Shembulli 6

Caktoni vlerën e shprehjes numerike në vijim: $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$.

Zgjidhje:

Në shprehjen e dhënë $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$ fillimisht i njehsojmë vlerat absolute: $|-8| = 8$ dhe $|-5| = 5$. Më pas, i zëvendësojmë në shprehjen e dhënë dhe fitojmë $8 + 3 \cdot 5 - 12$. Në shprehjen e fituar fillimisht e kryejmë operacionin e shumëzimit si operacion i rendit më të lartë dhe fitojmë shprehjen $8 + 15 - 12$. Tani vazhdojmë me kryerjen e operacioneve nga majtas - djathtas: $23 - 12 = 11$, përkatësisht $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12 = 8 + 3 \cdot 5 - 12 = 8 + 15 - 12 = 23 - 12 = 11$.

Detyra 4

Njehsoni vlerën e shprehjes $|9 - 11| \cdot 16 - (46 - 2 \cdot (-13)) - |-123|$.

Shembulli 7

Ndryshimin e numrit të plotë më të madh dyshifrorë negativ dhe numrit më të vogël të plotë dyshifrorë pozitiv shumëzoni me numrin më të vogël të plotë treshifrorë negativ.

Zgjidhje:

Fillimisht i shkruajmë numrat sipas kushteve të dhëna për secilin prej tyre. Numri më i madh dyshifrorë i plotë dhe negativ është numri -10 , numri më i vogël dyshifrorë i plotë dhe pozitiv është numri 10 dhe numri më i vogël treshifrorë i plotë dhe negativ është numri -999 . Më pas e shkruajmë dhe njehsojmë shprehjen numerike:

$$((-10) - (+10)) \cdot (-999) = (-10 - 10) \cdot (-999) = (-20) \cdot (-999) = 19980.$$

Detyra 5

Ndryshimin e numrave 200 dhe -426 zvogëloni për herësin e numrave -360 dhe -12 .

Detyra 6

Bojani ka luajtur 7 herë të njëjtën lojë dhe ka fituar $+13$, -8 , -16 , $+10$, $+4$, $+18$ dhe -7 pikë. Njehsoni sa pikë mesatarisht ka fituar ai për një lojë.

Detyra 7

Dejani punon si inxhinier në një shumëkatëshe katet e së cilës janë shënuar me numrat prej -3 deri 18. Ai duhet të mbikëqyrë punën në të gjitha katet dhe të lëviz me ashensor më shumë herë, lart e poshtë. Duke filluar nga kati i 11-të, ai zbret 3 herë nga 4 kate poshtë, e më pas ngjitet 2 herë lart për 5 kate, përkatësisht. Në cilin kat gjendet ai pas lëvizjeve të përmendura më sipër?

Detyra 8

Vesna në kartelën e saj ka fatura të mbetura të shërbimit telefonik për muajt janar, shkurt dhe mars me vlera përkatësisht prej 963 denarësh secila që duhet t'i paguajë, por pasi bën pagesën ajo në kartelë fiton 7800 denarë për punët që kishte realizuar. Shkruani dhe njehsoni, duke përdorur numra të plotë, shprehjen numerike për llogaritjen e gjendjes aktuale në kartelën e saj.

Detyra 9

Një kursimore bën raportin fiskal përfundimtar në fund të vitit. Ajo u ka borxh 45 klientëve nga 12300 denarë secilit, kurse nga 62 klientë kërkon nga 10450 denarë dhe nga 213 klientë të tjerë kërkon nga 3500 denarë. Si është rezultati përfundimtar në llogarinë e saj. A e mbyll vitin ajo me fitim?

Nëse në një shprehje numerike kemi kombinim të vlerave absolute dhe operacioneve mbledhje, zbritje, shumëzim dhe pjesëtim, si duhet t'i zbatoni rregullat për radhën e operacioneve që të fitoni rezultat të saktë? A ekzistojnë raste kur zbatimi i vlerës absolute mund ta ndryshojë vlerën numerike të shprehjes dhe si ndikon kjo në rezultatin përfundimtar?

Përgjigjju, në fletoren tënde, pyetjeve në vijim:

1. Çfarë mësova sot? (Përshkrim i shkurtër i konceptit bazik që e kuptove).
2. Çfarë ishte më e vështirë për mua? (Identifikimi i problemeve ose koncepteve që ishin më të vështirë).
3. Si do ta zbatoj këtë njohuri në të ardhmen? (Si e sheh zbatimin praktik të kësaj që mësove).

Vlerëso veten sipas shkallëzimit:

- 5 – Shkëlqyeshëm, e kuptoj të tërën dhe mund ta zbatoj ato që mësova.
- 4 – Mirë, por kam nevojë për përsëritje që të fitoj siguri.
- 3 – Kuptova një pjesë të materialit, por duhet të përpiqem më shumë.
- 2 – Ka edhe shumë gjera që nuk i kuptoj.
- 1 – Nuk kuptoj asgjë nga çka u shpjegua më sipër.

Në fund, me mësimdhënësin ose ndonjë nxënës tjetër, mund të ndash shkurtimisht pyetje ose çështje që për ty ishin më të dobishme nga njësia mësimore.

Punë e pavarur

- Gjeni vlerën e shprehjeve numerike:
 a) $(-21) + (-1) \cdot (+42) - (+24) : (-8)$ b) $(-32) : (+8) - (+12) + (-21) : (+3)$
- Njihsoni vlerën e shprehjes, fillimisht duke u liruar nga kllapat:
 $(-18) : (+3) - (-5) + (-17) \cdot (+2)$
- Shkruani shprehjen me ndihmën e kllapave ashtu që mos të ndryshojë vlera e saj.
 a) $-15 \cdot 3 - 48 + 2 \cdot 30 - 0:11$
 b) $-57 - 18 : 3 + 2 \cdot 17 - 6$
- Njihsoni ndryshimin ndërmjet produktit të numrave -10 dhe 9 me herësin e numrave -99 dhe -33 .
- Njihsoni:
 a) $-12 : 6 - 5 \cdot [14 - (2 - 5)]$ b) $(4 - 9) \cdot 3 - 28 : [-13 - 2 \cdot (-3)]$
- Njihsoni $(3a + b) : c$ nëse $a = -13$, $b = -69$, $c = -6$.
- Gjeni vlerën numerike të shprehjeve:
 a) $(+1) : (-1) + (-2) : (-1) + (+3) : (-1)$ b) $(2 - 18) : [(-2) : 1]$

Fuqia me tregues numër natyror

Në jetën e përditshme shpesh rastisim numra të mëdhenj, në veçanti në matematikë, shkencat e natyrës dhe teknologji. Në vend se t'i shkruajmë si numra me numër të madh shifrash, përdorim shënime më të shkurta me zbatimin e operacionit të fuqizimit. Në këtë njësi mësimore do të mësoni: çka do të thotë fuqizimi dhe si përdoret; çka paraqesin baza, treguesi dhe vlera e fuqisë dhe si ta llogaritni vlerën e fuqisë kur treguesi është numër natyror. Këto njohuri janë bazë për konceptet e mëtejme matematike sikurse janë shumëzuesit, numrat katrorë dhe kubikë.



Shembulli 1

Ana dëshiron të ndërtojë një gardh për oborrin e saj me lule. Ajo vendosi të përdor shtylla druri, duke vënë nga 3 shtylla në çdo rresht, kurse rreshtat përsëriten 7 herë.

- Shkruani sa shtylla gjithsej do të përdor ajo si shumë të mbledhësve të njëjtë.
- Shkruani shprehjen si shumëzim.

Zgjidhje:

- Pasi në secilin rresht ka 3 shtylla, kurse secili rresht përsëritet 7 herë, numrin e përgjithshëm të shtyllave mund ta shkruajmë si shumë të mbledhësve të njëjtë: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.
- Llogaritjen e njëjtë mund ta bëjmë duke e shprehur si shumëzim $7 \cdot 3 = 21$.
Nëse Ana bën gardhin e njëjtë për 5 oborre të tilla me lule, sa shtylla do t'i duhen?

Detyra 1

Në bibliotekë kishte 12 rafta dhe në secilin raft kishte nga 50 libra. Brenda një jave 15 nxënës kanë marrë nga 2 libra. Sa libra ka në bibliotekë pasi që nxënësit të kenë marrë librat që u nevojiteshin?

Shembulli 2

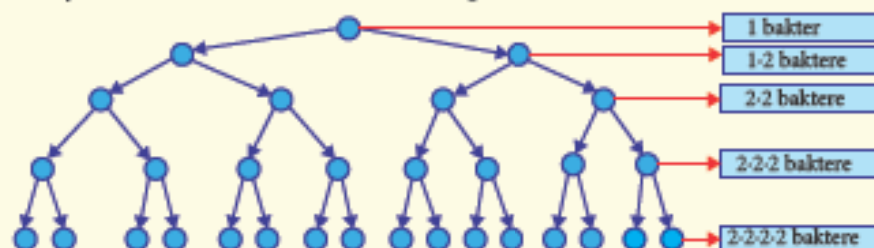
Shkencëtarët studiojnë një lloj bakteri që ndahet në dy të tilla në çdo 15 minuta. Studimi fillon me një bakter të vetëm.

- Shkruani, përmes shumëzimit, sa baktere do të ketë pas një ore.
- Paraqitni si fuqi numrin që arrijnë bakteret pas 1 ore.
- Nëse kjo ndarje, në këtë mënyrë, vazhdon pandryshim për 3 orë, shkruani numrin përfundimtar të baktereve me anë të fuqisë dhe llogaritni vlerën e saj.



Zgjidhje:

- Pasi bakteri ndahet në dy mostra të njëjta çdo 15 minuta, pas një ore (60 minuta) do të kemi 4 ndarje $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Domethënë, pas 1 ore do të ketë 16 baktere.



- b) Shumëzimi më i shkurtër i 4 dyshave mund të shkruhet si fuqi: $2^4 = 16$.
- c) Nëse procesi vazhdon për 3 orë, atëherë në ato 3 orë do të ndodhin gjithsej $3 \cdot 4 = 12$ ndarje. Numri i përgjithshëm i baktereve do të jetë: 2^{12} .
Nëse e llogaritim vlerën: $2^{12} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4096$. Pra, pas 3 orësh numri i baktereve do të jetë 4096.

Shumëzimi i një numri a me vetveten, n -herë, quhet fuqi dhe e shkruajmë

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-herë}} = a^n.$$

Numri a^n ku $n \in \mathbb{N}_0$ quhet fuqi me bazë a dhe tregues të fuqisë (eksponent) n .

Me llogaritjen e $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ fitohet vlera e fuqisë a^n . Procesi i llogaritjes së vlerës së fuqisë quhet fuqizim. Me marrëveshje, për çdo a , $a \neq 0$, $a^0 = 1$. Operacioni i fuqizimit ka përparësi përpara operacionit të shumëzimit, kështu në vend të $m \cdot (a^n)$ shkruajmë $m \cdot a^n$.

Në shembullin 2 nën b), $2^4 = 16$, numri 2 është baza e fuqisë, 4 është treguesi i fuqisë dhe 16 është vlera e fuqisë.

Shkruani bazën, treguesin e fuqisë dhe vlerën e fuqisë nën c).

Detyra 2

Markoja dhe Petri marrin pjesë në gara të matematikës ku duhet të krijojnë një sistem të tyre për matjen e gjatësisë duke përdorur fuqizimin. Ata vendosin që njësia themelore e gjatësisë të jetë 1 hap, kurse çdo rritje e mëtejme e largësisë do të jetë tri herë më e madhe se ajo paraprake.

- Shkruani largësinë pas çdo hapi të radhës për pesë nivelet e para duke përdorur shumëzimin.
- Paraqitni largësinë e njëjtë duke përdorur fuqitë e numrit 3.
- Nëse niveli i tetë paraqet largësinë e përgjithshme të kaluar, shprehni këtë largësi me fuqi dhe llogaritni vlerën e saj.

Detyra 3

Shkruani 10 fuqitë e para të numrit 10 me tregues numër natyror dhe llogaritni vlerat e tyre. Çfarë vëreni?

Shembulli 3

Markoja vendos të mbjell 3 lule javën e parë, kurse çdo javë pasuese vendos t'a dyfishojë numrin e luleve të mbjella në raport me javën e parë.

- Shkruani, përmes shumëzimit, numrin e luleve të reja që do t'i mbjellë ai në 6 javët e para.
- Paraqitni përmes fuqisë, numrin e luleve të mbjella për çdo javë.
- Njehsoni sa lule ai do të ketë mbjellur pas 6 javësh.

Zgjidhje:

- Pasi Markoja dyfishon numrin e luleve për çdo javë pasuese, fitojmë:
 $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
 Numri i luleve për javë është: 3, 6, 12, 24, 48, 96..
- Të njëjtën zgjidhje e fitojmë edhe nëse e shkruajmë përmes fuqive:
 $3, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4, 3 \cdot 2^5$.
- Që të njehsojmë numrin e përgjithshëm të luleve të mbjella pas 6 javësh, mbledhim lulet e mbjella në secilën javë dhe fitojmë:
 $3 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$.
 Pra, pas 6 javësh ai do të ketë të mbjellura 189 lule.

Detyra 4

Emilia punon në një ndërmarrje të vogël e cila prodhon dhe paketon kuti. Ajo fillon me 5 kuti të paketuara ditën e parë, kurse çdo ditë të radhës paketon trefish më shumë kuti se ditën paraprake.

- Shkruani, përmes shumëzimit, sa paketime kutish do të bëjë ajo përgjatë 4 ditëve të para.
- Me fuqi, paraqitni numrin e paketimeve të kutive që ajo i ka bërë çdo ditë.
- Njehsoni sa paketime kutish do të ketë bërë ajo pas 4 ditësh.

Si do ta përshkruanit dallimin mes fuqive me baza të ndryshme dhe me tregues të njëjtë (për shembull, 2^3 dhe 3^3) dhe si janë vlerat e tyre? Çfarë do të ndodhte nëse baza mbetet e njëjtë, kurse ndryshohet vetëm treguesi? Përshkruani procesin e llogaritjes dhe shpjegoni se si fuqitë me tregues të ndryshëm ndikojnë në vlerën e fuqisë.

Vlerëso dijet e tua.

- A mund ta shpjegoj ç'është fuqia dhe cilat janë komponentët e saj (baza dhe treguesi)?
 - Nuk mund ta shpjegoj
 - Mund ta shpjegoj me ndihmën e mësimitdhënësit
 - Mund ta shpjegoj në mënyrë të pavarur

2. A mund të shkruaj në mënyrë korrekte fuqi me tregues natyror për baza të ndryshme?
 - 1 = Nuk mund të shkruaj fuqitë
 - 2 = Mund të shkruaj fuqinë, por edhe ndodh të gaboj
 - 3 = Mund të shkruaj fuqitë shpejt dhe saktë
3. A mund të njehsoj vlerën e fuqive me tregues numra natyrorë?
 - 1 = Nuk mund t'i njehsoj
 - 2 = Mund t'i njehsoj me ndihmë nga mësuesi
 - 3 = Mund t'i njehsoj vetë dhe saktë
4. A mund t'i zbatoj fuqitë në kontekst të jetës së përditshme, për shembull, për të përshkruar rritjen e popullsisë e të ngjashme?
 - 1 = Nuk mund t'i lidh fuqitë me shembuj nga përditshmëria
 - 2 = Mund ta bëj me anë të shembujve, por me pak ndihmë
 - 3 = Mund ta bëj lidhjen në mënyrë të pavarur të fuqive me shembuj nga përditshmëria
5. A e kuptoj se si fuqitë me tregues të mëdhenj rriten shumë shpejt dhe pse kjo është e rëndësishme në matematikë?
 - 1 = Nuk e kuptoj
 - 2 = E kuptoj pjesërisht
 - 3 = E kuptoj plotësisht dhe mund ta shpjegoj

Nëse shumica e përgjigjeve janë ato nën 3, kjo do të thotë se me sukses i ke arritur gjitha standardet e njësishë mësimore.

Nëse më shumë përgjigje të dalin ato nën 2, atëherë mund të kesh nevojë për përsëritjen e disa pjesëve të njësishë mësimore.

Nëse më shumë përgjigje të dalin ato nën 1, atëherë këshillohu me mësimpldhënësin për ndihmë plotësuese dhe ushtrime.

Punë e pavarur

1. Produktet e dhëna shkruani përmes fuqive:
 - a) $7 \cdot 7 \cdot 7$
 - b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
 - c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
2. Paraqitni fuqitë e dhëna përmes shumëzimit:
 - a) 5^4
 - b) $(-3)^5$
 - c) $(x + y)^3$
3. Njehsoni vlerën e fuqive:
 - a) 5^4
 - b) $(-10)^5$
 - c) 3^4
4. Njehsoni vlerën e shprehjeve:
 - a) $2^3 - 3^3$
 - b) $5^3 (-3)^4 + 2^2 - (-7)^2$
 - c) $2^4 \cdot 3^2 + 5^2 : 5^2$

5.* Provoni çka është e saktë:

- a) $(-2)^{11} < 0$ b) $(-2)^{22} > 0$ c) $-2^{22} > 0$ ç) $(-5)^3 \cdot (-7)^3 > 0$
d) $a^3 \cdot b^3 > 0$, për $a > 0, b > 0$ dh) $a^3 \cdot b^3 < 0$, për $a < 0, b < 0$

6. Për cilët numra natyrorë n vlen:

- a) $1^n = 1$ b) $0^n = 0$ c) $2^n > 0$ ç) $(-3)^n > 0$ d) $(-5)^n < 0$

7. Për cilat vlera të n është e saktë shprehja:

- a) $2^n = 16$ b) $(-3)^n = -27$

8. Një pajisje USB ka kapacitet prej 2^4 gigabajt. Sa gigabajt ka pajisja?

9. Bakteri dyfishohet çdo orë. Nëse në fillim ka 3 baktere, sa të tilla do të ketë pas 5 orësh?

- a) Shkruani përmes fuqive shprehjen numerike për fitimin e numrit të baktereve pas 5 orësh.
b) Shkruani sa do të jetë numri i baktereve pas n orësh.

Katrorët dhe rrënjët katrore deri 100

Dijet që do të merrni me përpunimin e kësaj njësie mësimore do të jenë bazë për mësimin e mëtejshëm të koncepteve matematike dhe do të ndihmojnë në zgjidhjen e detyrave dhe problemeve të ndryshme. Do të mësoni si t'i dalloni katrorët dhe t'i njehsoni rrënjët katrore të tyre, si dhe t'i përdorni këto shkathtësi në përditshmërinë tuaj dhe në mësimin e mëtejshëm të matematikës.



Shembulli 1

Babai i Mehmetit kishte dy magazina. Në magazinën e parë kishte 425 kg miell, kurse në të dytën kishte 3 herë më shumë se në të parën. Babai, nga gjithë sasia e miellit në dy magazinat, shiti 40% të saj. Sa miell ka mbetur në dy magazinat?

Zgjidhje:

Sasia e miellit në magazinën e dytë është: $3 \cdot 425 = 1275$ kg. Pra, në magazinën e dytë ka 1275 kg miell. E gjithë sasia e miellit në të dyja magazinat është: $425 \text{ kg} + 1275 \text{ kg} = 1700$ kg. Sasia e shitur e miellit (40% nga të dyja magazinat) është 40% e 1700 kg dhe është: $0,4 \cdot 1700 = 680$ kg. Babai i Mehmetit ka shitur 680 kg miell. Në të dyja magazinat, pas shitjes, ka: $1700 \text{ kg} - 680 \text{ kg} = 1020$ kg. Në magazinat gjithsej kanë mbetur 1020 kg miell.

Shembulli 2

Janko radhit pllaka katrore në park. Format që fiton gjatë radhitjes, janë paraqitur në figurë.



- Shkruani numrin e përgjithshëm të pllakave që janë përdorur veçmas në secilën prej formave.
- Shkruani, në formë të fuqisë së një numri, numrin e pllakave të përdorura për secilën formë.
- Sa pllaka do të kishte forma e pestë, e gjashtë dhe e shtatë?

Zgjidhje:

- Forma 1 ka 1 pllakë, forma 2 ka 4 pllaka, forma 3 ka 9 pllaka, forma 4 ka 16 pllaka.
- Numri i pllakave, i shkruar si fuqi e një numri, që janë përdorur për ndërtimin e formave është:
 $1^2 = 1$, lexohet "1 në katror është 1",
 $2^2 = 4$, lexohet "2 në katror është 4",
 $3^2 = 9$, $4^2 = 16$.
- Nga mënyra se si janë ndërtuar format vërejmë se në secilën numri i rreshtave është i barabartë me numrin e pllakave në një rresht. Kështu, në formën e pestë do të ketë
 $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, në formën e gjashtë $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$, në formën e shtatë $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$,...

Numrat 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,... i quajmë katrorë të plotë ose numra katrorë.

Numri i cili mund të shkruhet si produkt i dy shumëzuesve të njëjtë (numra të plotë) quhet katror i plotë ose numër katror.

Detyra 1

Shkruani gjithë katrorët e plotë prej 1 deri 100.

Detyra 2

a) Sa është katrori i plotë i nëntë me radhë?

b) 68 a është katror i plotë i ndonjë numri?

Shembulli 3

Është dhënë numri katror 64. Cili numër në katror jep 64?

Zgjidhje:

Për t'u përgjigjur në këtë pyetje, duhet të gjejmë numrin i cili i shumëzuar me vetveten do të jepte produktin 64. Janë dy numra të tillë +8 dhe -8, sepse $8^2 = 64$ dhe $(-8)^2 = 64$. Për momentin do të ndalemi vetëm te numrat pozitivë të plotë (numrat natyrorë) dhe katrorët e tyre. Do të shkruajmë $\sqrt{64} = 8$ (lexohet "rrënja katrore e numrit 64 është e barabartë me 8"). Ngjashëm sikurse edhe shembulli 3 gjithashtu $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, ...

Numri b quhet rrënjë katrore e numrit a nëse $b^2 = a$ (shkruajmë $b = \sqrt{a}$).

Detyra 3

Shkruani rrënjët katrore të numrave 16, 25, 36, 49, 64, 81 dhe 100.

Detyra 4

Shkruani numrat vijues si shumë e dy numrave katrorë.

a) 13 b) 29 c) 45

Shembulli 4

Markoja ka oborr në formë katrore me syprinë prej 49 metrash katrorë. Sa është njëra anë e oborrit?

Zgjidhje:

Në fakt, kërkesa e detyrës është përcaktimi i rrënjës katrore të numrit 49. Pasi $7 \cdot 7 = 49$, përfundojmë se gjatësia e anës së oborrit të tij është 7m.

Detyra 5

Tri dhomat e një familjeje kanë formë katrore me syprinat përkatëse: 25 m^2 , 36 m^2 dhe 16 m^2 . Sa është perimetri i secilës dhomë?

Milo thotë se katrori i plotë asnjëherë nuk mbaron me shifrën 3. A ka të drejtë ai? Shpjegoni!

Në fletoren tënde, shkruaj përgjigjet në pyetjet:

1. A mund t'i dalloj numrat katrorë deri në 100? (Po/Ja)
2. A mund të gjej rrënjën katrore të numrit katror? (Po/Ja)
3. A mund ta zbatoj konceptin e numrave katrorë në shembuj realë (për shembull, gjatë llogaritjes së syprinës së objekteve katrore)? (Po/Ja)

Punë e pavarur

1. Njehsoni:
a) $\sqrt{225}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt{400}$
2. Nëse $x^2 = 81$, atëherë cilat janë vlerat e mundshme për x ?
3. Jovani dëshiron të rrethojë kopshtin në formë katrore me syprinë prej 144 m². Sa është gjatësia e anës së kopshtit? Njehso sa metër tel do t'i duhen për ta rrethuar kopshtin?
4. Nëse kopshti formë katrori ka anën (brinjën) 11 m, sa është syprina e tij?
- 5.* Formula për njehsimin e largësisë së jehonës së zërit është $d = \sqrt{t}$, ku d është largësia e dhënë në metra, kurse t është koha e dhënë në sekonda. Nëse jehona kthehet për 9 sekonda, sa është largësia deri te pengesa?
6. Maria dëshiron të blejë një shtrojë që ta mbulojë gjithë dyshtemenë e dhomës katrore të fëmijëve. Ajo e di që dhoma ka syprinë 81 metër katrorë. Ajo dëshiron të përcaktojë sa metra gjatësi duhet të ketë shtroja që të mbulojë gjithë dyshtemenë.
7. Një punëtor në magazinë duhet të rendit, në formë katrore, 225 kuti (numër i njëjtë i kutive në rreshta dhe shtylla). Në sa rreshta dhe shtylla janë radhitur kutitë?
8. Në një shkollë nxënësit kanë mbjellë 256 lule zbukuruese, duke formuar një formë katrore. Lulet janë në largësi të njëjtë nëpër numër të njëjtë rreshtash dhe shtyllash. Sa lule ka në secilin resht?

Krahasimi i thyesave

Një mënyrë për paraqitjen e pjesëve të një tërësie është përmes thyesave. Në jetë shpesh na duhet të krahasojmë thyesat. Për shembull, kur krahasojmë se cili ka ngrënë pjesën më të madhe të picës ose cili ka kaluar pjesë më të madhe të rrugës.

Që me korrektësi t'i krahasoni thyesat, duhet të kuptoni se ç' duhet bërë që të lehtësoni krahasimin e tyre. Në këtë njësi mësimore do të rikujtojmë disa nga mënyrat për krahasimin dhe renditjen e thyesave që i kemi mësuar në klasën e gjashtë:

- Sjellja në thyesa me emërues të njëjtë,
- Sjellja në thyesa me numërues të njëjtë,
- Përdorimi i diagrameve – krahasimi pamor i madhësive të thyesave.

Gjithashtu, do të mësoni t'i krahasoni thyesat duke i kthyer fillimisht në numra dhjetorë. Me përdorimin e njërës nga këto strategji saktësisht do të mund të caktoni se cila nga thyesat e dhëna është më e madhe ose më e vogël dhe t'i radhitni sipas madhësisë.



Shembulli 1

Jasmina i pëlqen shumë çokollatat. Si duhet të bëjë zgjedhjen në secilën nga detyrat nën a, b dhe c ashtu që të marrë pjesën më të madhe?

- Njëra pjesë është $\frac{6}{10}$ e çokollatës, kurse tjetra është $\frac{7}{10}$ e çokollatës.
- Njëra pjesë është $\frac{5}{8}$ e çokollatës, kurse tjetra është $\frac{5}{16}$ e çokollatës.
- Njëra pjesë është $\frac{3}{7}$ e çokollatës, kurse tjetra është $\frac{7}{10}$ e çokollatës.

Zgjidhje:

- Çokollata është ndarë në njësi të barabarta, mirëpo më e madhe është ajo pjesë e çokollatës që ka më shumë njësi, përkatësisht pjesa e çokollatës me shtatë njësi. Pra, Jasmina do të duhet të zgjedh pjesën që është $\frac{7}{10}$ e çokollatës sepse $\frac{7}{10} > \frac{6}{10}$.
- Me thyesat $\frac{5}{8}$ dhe $\frac{5}{16}$ fitojmë numër të njëjtë njësisish, por të ndryshme për nga madhësia. Më të mëdha janë ato pjesë që fitohen me ndarjen e çokollatës në më pak njësi. Jasmina duhet të zgjedh pjesën që është $\frac{5}{8}$ e çokollatës. Pra $\frac{5}{8} > \frac{5}{16}$. Rikujtim: Nga dy thyesa me numërues të njëjtë më e madhe është ajo e cila ka emëruesin më të vogël.
- Si do t'i krahasoni thyesat e dhëna? Këtu nuk kemi përputhje në numërues e as në emërues. Kështu që krahasimin do ta bëjmë duke shfrytëzuar procedurën e zgjerimit të thyesave deri në emërues të përbashkët.

Kështu fitojmë: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{30}{70}$ dhe $\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 7}{10 \cdot 7} = \frac{49}{70}$. $\frac{49}{70} > \frac{30}{70}$, gjegjësisht $\frac{7}{10} > \frac{3}{7}$.

Shembulli 2

Me ndihmën e shenjave $<$, $=$, $>$, krahasoni numrat:

- a) $\frac{2}{3}$ dhe 1 b) $\frac{7}{4}$ dhe 1 c) $\frac{5}{3}$ dhe 1

Zgjidhje:

- a) $\frac{2}{3}$ është thyesë e rregullt dhe nënkupton dy të tretat e një të tërë, kurse 1 paraqet një të tërë që ka tre të tretat. Prandaj, $\frac{2}{3} < \frac{3}{3}$, përkatësisht $\frac{2}{3} < 1$.
 b) Thyesa $\frac{7}{4}$ është e parregullt, prandaj $\frac{7}{4} > 1$, sepse $\frac{7}{4} > \frac{4}{4}$.
 c) $\frac{5}{3} = 1$. Pse?

Çdo thyesë e rregullt është më e vogël se 1, kurse çdo thyesë e parregullt është më e madhe ose e barabartë me 1. Shpesh në vend të emërimit thyesë e rregullt përdoret edhe emërtimi thyesë e drejtë; që të dy emërtimet kanë të njëjtin kuptim.

Detyra 1

Krahasoni thyesat:

- a) $\frac{1}{13}$ dhe $\frac{7}{11}$ b) $\frac{3}{7}$ dhe $\frac{3}{9}$ c) $\frac{5}{14}$ dhe $\frac{3}{8}$ d) $\frac{4}{9}$ dhe $\frac{7}{9}$ e) $\frac{17}{24}$ dhe $\frac{17}{19}$

Shembulli 3

Vanja përdori $\frac{14}{20}$ e luleve për buqetën e saj, kurse Meleku përdori vetëm $\frac{3}{5}$ e luleve.

- a) Shkruani thyesat si numra dhjetorë.
 b) Shkruani thyesat dhjetore si numra dhjetorë.
 c) Cila prej vajzave ka përdorur më pak lule për buqetën e luleve?

Zgjidhje:

- a) $\frac{14}{20} = \frac{14 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{70}{100}$. Thyesën e zgjerojmë me 5. Pse?
 Thyesën $\frac{3}{5}$ e zgjerojmë me 20. Pse? $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$.
 b) $\frac{60}{100} = 0,60$ dhe $\frac{70}{100} = 0,70$.
 Shpjegoni pse $\frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \frac{600}{1000}$. Nëse thyesat i shkruajmë si numra dhjetorë, kemi:
 $0,6 = 0,60 = 0,600$.
 Po ashtu, $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ ose $0,70 = 0,7$. Numrin e fituar 0,70 mund ta shkruajmë si 0,7. Pse?
 c) Pasi $0,7 > 0,6$, kemi $\frac{14}{20} > \frac{3}{5}$. Pra, Vanja ka përdorur më shumë lule se sa Meleku.

Nga këtu mund të shkruajmë dy veti të numrave dhjetorë:

Numri dhjetor nuk ndryshon nëse në anën e djathtë të tij, pas dhjetores së fundit, shtojmë sado qoftë zero. Numri dhjetor nuk ndryshon nëse në anën djathtë të tij shpërfillen zerot pas së cilave nuk ka më shifra jo zero.

Shembulli 4

Kola bleu $\frac{2}{5}$ kg patate dhe $\frac{3}{8}$ kg qepë. Nga cilat perime ka blerë sasi më të madhe?

Zgjidhje:

E dimë që vija thyesore nënkupton pjesëtimin. Duke pjesëtuar numëruesin me emëruesin thyesën mund ta kthejmë në numër dhjetor.

Kemi $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$ dhe $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$. Tani mbetet të krahasojmë dy numra dhjetorë. Këtë e kemi mësuar në klasën e gjashtë. Numri dhjetor 0,4 ka më shumë të dhjeta se numri dhjetor 0,375. Pra $0,4 > 0,375$, përkatësisht $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$. Kola ka blerë më shumë patate se qepë. Kur i di vetitë e numrave dhjetorë, që t'i krahasosh, mund t'i shkruash me numër të njëjtë decimalesh, përkatësisht $0,4 = 0,400$. Fiton $0,400 > 0,375$, përkatësisht $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$.

Gjatë krahasimit të thyesave, fillimisht mund t'i shkruani si numra dhjetorë që fitohen kur pjesëtojmë numëruesin me emëruesin e thyesës, e më pas i krahasojmë numrat e fituar dhjetorë.

Detyra 2

Krahasoni thyesat pasi më parë t'i keni shkruar si numra dhjetorë:

- a) $\frac{17}{50}$ dhe $\frac{7}{20}$ b) $\frac{103}{1000}$ dhe $\frac{1}{8}$ c) $\frac{4}{125}$ dhe $\frac{8}{25}$ ç) $\frac{19}{8}$ dhe $2\frac{2}{5}$

Shembulli 5

Në një garë sportive shkollore katër nxënës morën pjesë në vrap dhe vrapuan pjesë të ndryshme të shtegut përpara se të ndalonin për të pushuar. Gjatësia e shtegut të vrapimit është e njëjtë për të gjithë, kurse rezultatet janë: Jana ka kaluar $\frac{3}{5}$ e shtegut. Markoja ka kaluar $\frac{1}{8}$ e shtegut, Ivana ka kaluar $\frac{3}{4}$ e shtegut dhe Pjetri ka kaluar $\frac{5}{10}$ e shtegut.

- a) Cili nxënës ka kaluar pjesë më të madhe nga shtegu i vrapimit?
b) Cili nxënës ka kaluar pjesë më të vogël nga shtegu i vrapimit?
c) Radhitni rezultatet e nxënësve nga ai që ka kaluar pjesë më të vogël deri tek ai që ka kaluar pjesë më të madhe?

Zgjidhje:

Thyesat i shkruajmë si numra dhjetorë:

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6 = \text{duke përdorur vetinë e parë} = 0,600$$

$$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125 \quad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 = 0,750 \quad \frac{5}{10} = 5 : 10 = 0,5 = 0,500$$

Tani i krahasojmë numrat e fituar dhjetorë dhe fitojmë
 $0,125 < 0,5 < 0,6 < 0,75$.

- Ivana ka kaluar pjesë më të madhe nga shtegu i dhënë.
- Markoja ka kaluar pjesë më të vogël të shtegut të dhënë.
- $\frac{1}{8} < \frac{5}{10} < \frac{3}{4} < \frac{3}{4}$

Detyra 3

Një mjeshtër mund ta mbyll një punë për 8 orë, kurse një tjetër për 5 orë. Të satën pjesë të punës secili prej tyre mund ta mbarojë për 1 orë? Cili prej tyre mund të kryej më shumë punë për 6 orë?

Detyra 4

Radhitni numrat $\frac{39}{50}$; 0,45 ; $\frac{1}{2}$; 1,67; 0,005; $\frac{18}{25}$; $\frac{4}{5}$ duke filluar nga më i vogli.

Pse është e rëndësishme të dimë se si t'i krahasojmë dhe si t'i renditim thyesat në jetën e përditshme? A mund të jepni një shembull nga jeta ku kjo dije do t'u shërbente?

Përgjigju pyetjeve në vijim, në fletoren tënde, që ta vlerësosh punën tënde.

- Sa mirë kuptoj ç'është thyesa dhe si ta krahasoj me një thyesë tjetër?
- A e kam të qartë se si t'i radhis thyesat?
- A arrita të zbatoj strategjitë për krahasimin e thyesave në njësitë mësimore praktike? (shkruaj shkurt)

Përdor shkallëzimin prej 1 deri 5, ku:

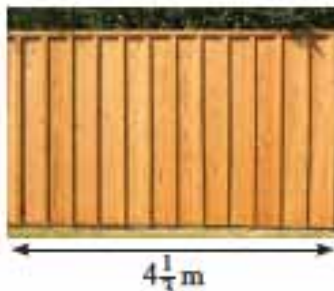
- 1 – Nuk kuptova asgjë.
- 2 – Kuptova diçka, por kam akoma shumë pyetje.
- 3 – Kuptova një pjesë të njësive mësimore, por ka edhe gjëra që nuk i kam të qarta.
- 4 – Kuptova mirë, por më duhen më shumë ushtrime.
- 5 – E kuptova tërësisht njësinë mësimore dhe mund ta zbatoj.

Punë e pavarur

- Krahasoni thyesat: a) $\frac{1}{3}$ dhe $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{7}$ dhe $\frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{9}$ dhe $\frac{8}{9}$ ç) $\frac{12}{17}$ dhe $\frac{13}{17}$ d) $\frac{36}{47}$ dhe $\frac{21}{47}$
- Krahasoni thyesat: a) $\frac{3}{5}$ dhe $\frac{3}{7}$ b) $\frac{7}{12}$ dhe $\frac{7}{6}$ c) $\frac{10}{10}$ dhe $\frac{10}{20}$ ç) $\frac{41}{38}$ dhe $\frac{41}{38}$ d) $\frac{258}{300}$ dhe $\frac{258}{100}$
- Thyesat sillni në thyesa me emërues më të vogël të përbashkët: a) $\frac{3}{4}$ dhe $\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{12}$ dhe $\frac{13}{15}$ c) $\frac{11}{15}$ dhe $\frac{31}{35}$ ç) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{15}$ dhe $\frac{1}{20}$ d) $\frac{11}{18}$, $\frac{31}{72}$, $\frac{5}{9}$ dhe $\frac{29}{36}$
- Thyesat e dhëna radhitni sipas madhësisë, duke filluar nga më e vogla, të ndara mes veti me simbolin <: a) $\frac{12}{18}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{7}{18}$ dhe $\frac{10}{18}$ b) $\frac{13}{15}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{13}{28}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{13}{128}$, $\frac{13}{12}$ dhe $\frac{13}{44}$ c) $\frac{8}{140}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{58}{60}$ dhe $\frac{253}{420}$
- Një punëtor e ndërtoi një kulm për $\frac{1}{3}$ e ditës, kurse të nesërmen ndërtoi edhe një kulm tjetër në të cilin harxhoi $\frac{3}{8}$ e ditës. Për cilin kulm ka harxhuar më shumë kohë?
- Një bojxhi ngjyrosi një mur për 3 ditë. Ditën e parë përfundoi $\frac{1}{3}$ e murit, ditën e dytë $\frac{4}{12}$ e murit dhe ditën e tretë $\frac{14}{30}$ e murit. Cilën ditë ka përfunduar pjesë më të vogël të murit, e cilën ditë pjesë më të madhe?
- Një rrobaqepës mund të qep një veshje për 5 orë, kurse një tjetër të njëjtën veshje për 7 orë. Cili ka qep më shumë, nëse rrobaqepësi i parë ka punuar 4 orë, kurse rrobaqepësi i dytë një orë më shumë se i pari?
- Tre djem kanë shumë të njëjtë parash, përkatësisht. Djali i parë harxhoi $\frac{4}{5}$ e shumës, i dyti $\frac{13}{15}$, kurse djali i tretë harxhoi $\frac{17}{21}$ e parave. Cili prej djemve harxhoi më shumë, e cili më pak?
- Një rezervuar për ujë mbushet me dy gypa. Gypi i parë mund ta mbush rezervuarin për 8 orë, kurse i dyti për 11 orë. Nëse gypi i parë është i hapur 3 orë, gypi i dytë 4 orë, atëherë cili prej tyre do të mbushë pjesë më të madhe të rezervuarit?
- Që të kursejë ujë, Nebojsa mbledh ujërat e shirave nëpër fuçi, secila prej të cilave ka kapacitet prej 1 kilolitra. Kështu, në fuçinë e parë mbush 0,34 kl, në fuçinë e dytë $\frac{4}{5}$ e fuçisë, në të tretën $\frac{1}{8}$ dhe në fuçinë e katërt 0,6 kl. Në cilën prej fuçive ka më shumë, e në cilën më pak ujë shiu?

Numrat dhjetorë periodikë

Shpesh na ndodh të rastisim në situata kur duhet t'i bëjmë thyesa numrat dhjetorë ose anasjelltas. Për shembull, sa centimetra është e gjatë pjesëza e gardhit të oborrit nëse e shprehur me metra jepet me $4\frac{1}{3}$ m. Nëse do ta kthenim këtë numër të përzier në numër dhjetor, do të fitonim numrin që përmban 4 të plota dhe 3 si dhjetore (decimale) e cila përsëritet pandërprerë, kurse pjesëtimi nuk përfundon. Për dallim nga numri $4\frac{1}{3}$, numri $4\frac{3}{5}$ i kthyer në numër dhjetor është 4,6, përkatësisht ka numër të fundëm dhjetorësh.



Në këtë njësi do të mësoni si t'i shkruani dhe emërtoni numrat shjetorë pa dallim të numrit të vendeve dhjetore që kanë, kurse fitohen gjatë pjesëtimit të dy numrave të çfarëdoshëm. Me këto dije do ta përmirësoni aftësinë tuaj për punë me numra dhjetorë dhe do të mundeni lehtësisht të zgjidhni problemet me to.

Shembull 1

- Cili nga numrat është më i madh: 3,45 ose 3,54?
- Cili nga numrat është më i vogël: 6,27 ose 6,72?
- Cili numër është më i madh: 2,85; 2,58 ose 2,95?
- Radhitni numrat nga më i vogli kah më i madhi: 4,6; 4,16; 4,61

Zgjidhje:

- $3,54 > 3,45$
- $6,27 < 6,72$
- Më i madh është numri 2,95.
- $4,16 < 4,6 < 4,61$

Shpjegoni përgjigjet e dhëna për secilën pyetje.

Detyra 1

Numrin 18,356248 rrumbullakoni:

- në një dhjetore
- në dy dhjetore
- në katër dhjetore

Shembulli 2

Në katër kuti ka sasi të ndryshme me portokaj: $\frac{3}{8}$ kg, $\frac{7}{9}$ kg, $\frac{40}{27}$ kg, $\frac{7}{12}$ kg.

- Shkruani si numër dhjetor secilën sasi të portokajve.
- Shpjegoni se çka vëreni.

Zgjidhje:

a) $\frac{3}{8} : 8 = 0,375$ $\frac{7}{9} : 9 = 0,77777...$ $\frac{40}{27} : 27 = 1,481481...$ $\frac{7}{12} : 12 = 0,58333...$

$$\begin{array}{r} 30 \\ -24 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -27 \\ 130 \\ -108 \\ \hline 220 \\ -216 \\ \hline 40 \\ -27 \\ \hline 130 \\ -108 \\ \hline 220 \\ -216 \\ \hline 40 \\ -27 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ -60 \\ \hline 100 \\ -96 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \end{array}$$

Gjatë pjesëtimit të 3 me 8 për thyesën $\frac{3}{8}$, pjesëtimi mbaron, përkatësisht fitohet mbetja 0. Numri i fituar është dhjetor të cilin e quajmë edhe **numër dhjetor i fundëm**. Në secilën prej thyesave të tjera gjatë pjesëtimit të numëruesit me emëruesin pjesëtimi nuk përfundon. Sado qoftë zero të shtojmë, nuk fitojmë mbetjen 0, gjegjësisht pjesëtimi vijon në pafundësi. Numrat e fituar dhjetorë si këto kanë pafund shumë dhjetore dhe prandaj i quajmë **numra dhjetorë të pafundëm**.

Numrat dhjetorë të pafundëm $0,7777...$ dhe $1,481481...$ kanë një shifër (7) ose grup shifrash (481) që përsëriten në radhitje të njëjtë menjëherë pas presjes dhjetore. Numrat e këtillë dhjetorë quhen numra dhjetorë periodikë të pastër. Vargu i shifrave që përsëriten në numrin dhjetor quhet periodë.

Në numrin dhjetor $0,58333...$ që fitohet gjatë pjesëtimit të 7 me 12, përsëritja e shifrës ose grupit të shifrave në radhën e njëjtë nuk fillon menjëherë pas presjes dhjetore. Numrat si ky i quajmë **numra dhjetorë periodikë të përzier**.

	Numra dhjetorë periodikë të pastër		Numra dhjetorë periodikë të përzier
numri	$0,777...$	$0,481481...$	$0,58333...$
Lexohet	0 të plota dhe 7 në periodë	0 të plota dhe 481 në periodë	0 të plota, 58 të qindtat dhe 3 në periodë
Shkruhet	$0,(7)$	$0,(481)$	$0,58(3)$

Në numrin $0,58(3)$ grupi i shifrës 58 gjendet para shifrës 3 (periodës) dhe quhet paraperiodë.

Me prezantimin, futjen, e numrave dhjetorë (të fundëm dhe të pafundëm) çdo numër natyror mund ta pjesëtojmë me çdo numër natyror dhe rezultati i fituar i këtij pjesëtimi është numër dhjetor i fundëm ose numër dhjetor periodik i pafundëm.

Gjatë pjesëtimit të dy numrave mund të fitojmë:

- 1) Numër dhjetor të fundëm.
- 2) Numër dhjetor të pafundëm, edhe atë:
 - a) numër dhjetor periodik të pastër (kur menjëherë pas presjes dhjetore përsëritet një shifër ose grup shifrash),
 - b) numër dhjetor periodik të përzier (kur përsëritja e një shifre ose grupi shifrash nuk fillon menjëherë pas presjes dhjetore).

Detyra 2

Shkruani si numra dhjetorë thyesat në vijim dhe caktoni se i cilit lloj është numri dhjetor i fituar:

- a) $\frac{37}{25}$ b) $\frac{12}{27}$ c) $\frac{625}{135}$ ç) $\frac{123}{29}$ d) $\frac{20\,250}{1\,296}$ dh) $\frac{19}{9}$

Shembulli 3

Ana dhe Markoja dëshirojnë të bëjnë biskota. Sipas recetës, u duhen $\frac{2}{3}$ litra qumësht, $\frac{3}{4}$ kilogram miell dhe $\frac{5}{6}$ kilogram sheqer.

- a) Thyesat e dhëna shkruani si numra dhjetorë.
- b) Për çdo numër të fituar dhjetor, shpjego nëse është numër dhjetor i fundëm ose i pafundëm.
- c) Nëse gota e cila shërben për masë ka shenjë në çdo 0,1 litër, në sa litra do të rrumbullakojnë numrin që tregon vëllimin e qumështit?
- ç) Nëse në peshore masa mund të matet me saktësi deri 0,01 kg, në sa kilogramë do t'i rrumbullakojnë miellin dhe sheqerin?

Zgjidhje:

- a) Thyesat e shkruara si numra dhjetorë janë: $\frac{2}{3} = 0,4$; $\frac{3}{4} = 0,75$ dhe $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$
- b) 0,4 është numër dhjetor i fundëm sepse ka numër të fundëm shifrash pas presjes dhjetore. 0,75 është numër dhjetor i fundëm sepse ka numër të fundëm shifrash pas presjes dhjetore. 0,833... është numër dhjetor periodik i përzier sepse shifra 3 përsëritet pafund herë, kurse përsëritja e saj nuk fillon menjëherë pas presjes dhjetore.
- c) Pasi gota që shërben për masë ka shenja në çdo 0,1 litër, 0,4 litra mund të maten saktësisht. Pra, nuk ka nevojë për rrumbullakim të vlerës sepse ajo përputhet me shkallëzimin e dhënë.
- ç) Mielli (0,75 kg) tashmë ka dy vende dhjetore, kështu që nuk është e nevojshme të rrumbullakohet në të qindtat, përderisa sheqeri (0,8333...) duhet të rrumbullakohet në dy vende decimale: 0,83 kg. Mendoni dhe shpjegoni arsyen pse në këtë rast nuk kemi marrë rrumbullakimin në 0,84?

Detyra 3

Maria dhe Ivani matën gjatësitë e objekteve të ndryshme për projektin e tyre shkollor. Këto janë matjet e tyre në metra: gjatësia e tavolinës është $\frac{7}{8}$ m, lartësia e stolit është $\frac{5}{4}$ m dhe gjatësia e shiritit dekorativ është $\frac{2}{3}$ m.

- Shndërroni në numra dhjetorë thyesat e dhëna.
- Për secilin numër të fituar më sipër caktoni nëse është numër dhjetor i fundëm ose i pafundëm.
- Nëse Maria dhe Ivani përdorin shirit matës me shenja në çdo 0,05 m, në cilën shenjë më të afërt do ta rrumbullakojnë secilën prej gjatësive të matura?

Nëse e pjesëtojmë 1 me 3, fitojmë numër dhjetor periodik të pafundmë (0,333...). Nëse këtë rezultat e shumëzojmë me 3, fitojmë 0,999..

Por, e dimë se $1 : 3 \cdot 3 = 1$. Si është e mundur që 0,999... të jetë 1? Çfarë mendoni, pse ndodh kjo?

“Tri pyetje për të menduar” në fletoren tënde:

- Ç'mësova sot për numrat dhjetorë të fundmë dhe të pafundmë? (Shkruaj një ose dy fjali.)
- Cila detyrë ishte më e lehtë, e cila më e vështirë? Pse? (Identifikoni sfidat.)
- Ndjesia për njësinë mësimore?
(😊 Shkëlqyeshëm! 😊 Mirë! 😊 Duhet të ushtroj më shumë.)

Punë e pavarur

1. Pjesëtoni:

- a) $2 : 3$ b) $5 : 9$ c) $2 : 11$ ç) $14 : 22$ d) $16 : 27$ dh) $50 : 37$ e) $8 : 54$ ë) $73 : 41$

Numrat e fituar a janë numra periodik të pastër ose të përzier?

Cakto periodën e secilit numër.

2. Shndërroni në numra dhjetorë thyesat dhe për secilin prej tyre cakto periodën dhe paraperiodën, nëse i posedon.

- a) $\frac{38}{9}$ b) $\frac{13}{15}$ c) $\frac{32}{28}$ ç) $\frac{42}{36}$ d) $\frac{118}{123}$ dh) $\frac{23}{37}$

3. Rrumbullakoni numrat e dhënë në një dhjetore:

- a) 0,147 b) 5,6(3) c) 14,009 ç) 1,91556 d) 3,(5) dh) 0,901 e) 26,863 ë) 26,98

4. Rrumbullakoni numrat e dhënë në dy dhjetore:

- a) 6,06132 b) 0,009995 c) 153,0(5) ç) 12,561999 d) 0,(9) dh) 77,(7)
e) 9,0(173) ë) 9,99(8)

Përshkrimi, njehsimi dhe krahasimi i pjesëve të së tërës me thyesa dhe përqindje

Thyesat dhe përqindjet janë pjesë e rëndësishme e rutinës ditore – do t'i përdorni kur llogaritni uljet në shitore, kur krahasoni rezultatet, analizoni përbërjen nutritive të ushqimit ose kur caktoni sasinë e përdorur të diçkaje. Në këtë njësi mësimore do të mësoni si t'i përdorni thyesat dhe përqindjet për të përshkruar pjesët e formave, tërësive dhe masave.



Do të hulumtoni si të njehsoni përqindje të thjeshta nga tërësia e dhënë dhe si të shprehni pjesë të diçkaje përmes thyesave dhe përqindjeve. Po ashtu, do të përdorni përqindjet për krahasimin e sasive të ndryshme dhe për të kuptuar rëndësinë e tyre në situata të ndryshme. Këto dije do t'u ndihmojnë të kuptoni më mirë lidhjet matematike përreth dhe të merrni vendime më të mira në jetë.

Shembulli 1

Jepen dy situata të ndryshme në të cilat duhet të përdorni thyesa, numra dhjetorë dhe përqindje:

Situata 1: Është realizuar një anketim për frutat e parapëlqyera mes 1100 nxënësve dhe janë fituar rezultatet në vijim: 12% e nxënësve kanë përzgjedhur mollët, 14% bananet, 15% portokallet, 110 nxënës nuk kanë përzgjedhur fruta, kurse të tjerët kanë përzgjedhur një fruit krejt tjetër nga këto më lart.

Situata 2: Një park është mbuluar me pllaka, edhe atë me 141000 pllaka. Në këtë park, 1410 pllaka janë në pjesën ku është vendosur këndi i lojërave.

- Shndërroni përqindjet 12%, 14% dhe 15% në thyesa.
- Caktoni sa përqindje e numrit të përgjithshëm (1100) paraqesin 110 nxënësit që nuk kanë përzgjedhur fruta. Shkruani këtë rezultat si përqindje dhe si thyesë.
- Caktoni se sata pjesë e parkut i takon këndit të lojërave, e shprehur si përqindje dhe si thyesë.

Zgjidhje:

$$a) 12\% = \frac{12}{100} = \frac{12 \cdot 4}{100 \cdot 4} = \frac{3}{25}, 14\% = \frac{14}{100} = \frac{14 \cdot 2}{100 \cdot 2} = \frac{7}{50}, 15\% = \frac{15}{100} = \frac{15 \cdot 5}{100 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

$$b) \text{ Pjesa që paraqet nxënësit që nuk përzgjedhën fruta e paraqitur si thyesë është } \frac{110}{1100}.$$

Thyesa mund të thjeshtohet nëse numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me 110 dhe fitohet

$$\frac{110 \cdot 110}{1100 \cdot 110} = \frac{1}{10}. \text{ Thyesa } \frac{1}{10} \text{ nëse zgjerohet me 10 që të fitojmë 100 në emërues, na jep}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%. \text{ Pra, 10\% e nxënësve nuk kanë përzgjedhur frutat nga tre llojet e ofruara.}$$

- Udhëzim: Zgjidhet si nën b).

Detyra 1

Një produkt ka çmimin 900 denarë, Çmimi i produktit ulet për 15%. Sa kushton produkti pas uljes së çmimit?

Shembulli 2

Në oborrin e familjes Silajnovski ishin vendosur 1000 llamba për dekorim me rastin e një gëzimi familjar. 12% e llambave ishin të kaltra, 24% të gjelbra dhe 15% të kuqe. Llambat e tjera ishin të verdha.

- Sa nga llambat ishin të kaltra, të gjelbra dhe të kuqe?
- Numri i llambave me ngjyrat përkatëse të shkruhet si thyesë.
- Caktoni numrin e llambave të verdha.

Zgjidhje:

- 12% e 1000 llambave ishin të kaltra. Nëse 1% ose $\frac{1}{100}$ e 1000 janë 10 llamba, atëherë 12% do të jenë $12 \cdot 10 = 120$. Pra, 120 llamba ishin të kaltra.
24% e 1000 llambave ishin të gjelbra (të kaltra ishin 12%). Kjo do të thotë se kemi dyfish më shumë llamba me ngjyrë të gjelbër se sa të kaltra. Nëse 120 janë të kaltra, atëherë fitojmë $2 \cdot 120 = 240$ llamba të gjelbra.
Ngjashëm 15% e 1000, përkatësisht $15 \cdot 10 = 150$ llamba janë të kuqe.
Mund të veprojmë edhe në tjetër mënyrë: Duke nisur nga fakti që $10\% = \frac{1}{10}$ fitohet se 10% e 1000 është $1000 : 10 = 100$, kurse për 5% kemi gjysmën e 10%, përkatësisht gjysmën e 100, e që është 50 llamba. Kështu për 15% fitojmë se $100 + 50 = 150$ llamba janë të kuqe.
- 120 llamba nga 1000 ishin të kaltra, këtë mund ta shkruajmë si thyesë $\frac{120}{1000}$
240 llamba nga 1000 ishin të gjelbra që si thyesë na jep $\frac{240}{1000}$ dhe 150 llamba prej 1000 ishin të kuqe ose si thyesë shkruajmë $\frac{150}{1000}$. Thyesat e mësipërme shkruani si thyesa të pathjeshtueshme.
- Caktojmë në fillim sa llamba ishin të kaltra, gjelbra dhe të kuqe: $120 + 240 + 150 = 510$. Tani nga numri i përgjithshëm 1000 minusojmë 510 për të fituar numrin e llambave të verdha. Pra, llamba të verdha ishin $1000 - 510 = 490$. Shkruani sasinë e llambave të verdha si thyesë dhe si përqindje.

Shembulli 3

Në një shitore është shitur $\frac{12}{25}$ e stofit të gjelbër dhe 38% e stofit ngjyrë kafe. Nëse gjatësitë fillestare të dy stofave janë të barabarta, nga cili stof është shitur më shumë?

Zgjidhje:

Detyrën mund ta zgjidhni në më shumë se një mënyrë.

Mënyra I: Shkruani thyesën dhe përqindjen si numra dhjetorë: $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 0,48$.

$38\% = \frac{38}{100} = 0,38$. $0,48 > 0,38$, domethënë $\frac{12}{25} > 38\%$. Më shumë është harxhuar stof i gjelbër.

Mënyra II: 38% e shkruajmë si thyesë, përkatësisht $38\% = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$. Thyesat $\frac{12}{25}$ dhe $\frac{19}{50}$ i kthejmë në thyesa me emërues të njëjtë, $\frac{12}{25} = \frac{24}{50}$. Fitojmë $\frac{24}{50} > \frac{19}{50}$. Pra $\frac{12}{25} > 38\%$. (nga gjatësitë e barabarta fillestare)

Mënyra III: Thyesën $\frac{12}{25}$ e shkruajmë si përqindje. Kemi $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 48\%$; $48\% > 38\%$. Pra $\frac{12}{25} > 38\%$. (nga gjatësitë e barabarta fillestare)

Detyra 2

- a) Duke shfrytëzuar diagramin, shkruani sa është $\frac{5}{6}$ e 24.
b) Vizatoni një diagram me të cilin do të paraqitni sa është $\frac{3}{7}$ e 14 mollëve.

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Shembulli 4

Në një shitore për përgatitje sportive ka 1200 produkte. Shitorja ka çmime promocionale për kategoritë në vijim të produkteve: 12% e produkteve promocionale janë atlete, 18% janë tekstil, 10% janë çanta sportive. Pjesa e mbetur e produkteve promocionale janë aksesore sportive shtesë.

- a) Njihsoni sa produkte, në numër, i takojnë secilit nga lloji i produkteve të kategorive të përmendura (atlete, tekstil dhe çanta sportive)
b) Njihsoni sa produkte janë aksesore sportive shtesë.
c) Shkruani sasinë e produkteve të tekstit si thyesë dhe si përqindje.
ç) Njihsoni sa është ndryshimi i përqindjeve të aksesoreve sportive dhe atleteve.

Zgjidhje:

- a) Numri i përgjithshëm i produkteve është 1200.

Atlete: 1% e 1200 ose $\frac{1}{100}$ e 1200 është 12, pra 12% e 1200 do të jenë $12 \cdot 12 = 144$.

Produkte tekstili: 1% e 1200 është 12, pra 18% e 1200 do të jenë $18 \cdot 12 = 216$.

Çanta sportive: 10% = $\frac{1}{10}$ e 1200, prandaj fitohet $1200 : 10 = 120$ (ose, nga fakti që 1% e 1200 është 12, 10% është 10 herë më shumë, përkatësisht $10 \cdot 12 = 120$).

- b) Që të gjeni numrin e aksesoreve sportive shtesë, fillimisht njihsoni sa produkte gjithsej nga numri i 1200 produkteve janë promocionale: $144 + 216 + 120 = 480$ produkte. Pasi gjithsej ka 1200 produkte, numri i aksesoreve sportive shtesë është $1200 - 480 = 720$ produkte.

- c) Produkte tekstili ka 216. Si thyesë, ky numër ndaj numrit të përgjithshëm të produkteve, është:

$$\frac{216}{1200} = \frac{216 \cdot 4}{1200 \cdot 4} = \frac{54 \cdot 3}{300 \cdot 3} = \frac{18}{100} = 18\%$$

- ç) Numri i aksesoreve sportive shtesë është 720. Ky numër ndaj numrit të përgjithshëm të produkteve jep:

$$\frac{720}{1200} = \frac{720 \cdot 12}{1200 \cdot 12} = \frac{60}{100}$$

$\frac{60}{100} = 60\%$. Atletet përbëjnë 12% të produkteve, kurse aksesoret sportive përbëjnë 60% të produkteve. Domethënë $60\% - 12\% = 48\%$ është ndryshimi ndërmjet përqindjeve të aksesoreve dhe atleteve.

Detyra 3

Një kamion me masë bartëse të përgjithshme 2,4 tonelata mbarte zhavorr për kantierin e ndërtimit. Herën e parë dërgoi $\frac{5}{8}$ e 2,4 t, kurse herën e dytë 85% të masës së përgjithshme bartëse të tij. Në cilën radhë kishte bërë dërgesë më të madhe?

Si do të kishit përdorur strategjitë e mësuara për njehsimin e përqindjeve dhe thyesave për vlerësimin dhe krahasimin e informacioneve nga përditshmëria? Nënvizoni një shembull konkret ku kjo dije do të mund të ndihmonte që të vinit në përfundim më të mirë.

Zgjidhni (në shtëpi ose shkollë) detyrat në vijim në fletoren tënde edhe atë për 10 minuta:

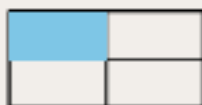
1. Sa është 23% e 600?
2. Shkruani thyesën $\frac{34}{50}$ në përqindje.
3. Shkruani thyesën $\frac{7}{4}$ si numër dhjetor.
4. $\frac{3}{5}$ e nxënësve të një paraleleje luanin basketboll, kurse 15% luanin tenis. Në cilin sport ishin të angazhuar më shumë nxënësit e kësaj paraleleje?

Ndani përgjigjen e secilës detyrë dhe strategjinë e zgjidhjes me ndonjë shok klase.

Punë e pavarur

1. Shkruani si përqindje thyesat: $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{6}{50}$.
2. Shkruani si thyesa përqindjet: 3 %, 11 %, 16 %, 24 %, 30 %, 55 %, 76 %, 80 %, 250 %.
3. Shkruani si përqindje numrat dhjetorë: 0,06; 0,13; 0,25; 0,5; 0,77; 0,84; 0,9; 0,95; 1,23; 7,7.
4. Me thyesë dhe përqindje, paraqitni pjesën e ngjyrosur të formës:

a)



b)



c)



ç)



5. Një punëtor kishte rrogën 20000 denarë. Rroga i rritet 5%. Sa denarë është rritja dhe sa do ta ketë rrogën pas rritjes?
6. Çmimi i një palë atletesh ishte 1000 denarë. Në fund të sezonit çmimi i atleteve ishte ulur për 10%. Me çfarë çmimi do të shiten atletet pas uljes?
7. Në paralelen VII^a kishte 25 nxënës. Në gjysmëvjetor 7 nxënës kishin 5 në matematikë, 9 në gjuhë amtare dhe 12 në biologji. Sa përqind e nxënësve ishin të shkëlqyeshëm në matematikë, gjuhë amtare dhe biologji?
8. Benzina që deri në mesnatë kishte çmimin 70 denarë, u shtrenjtua për 4%. Sa është çmimi i ri i benzinës?
9. Në një kamp veror futbollit $\frac{4}{25}$ e nxënësve mësuan të bëhen portierë, $\frac{6}{15}$ të luajnë në mesfushë dhe në mbrojtje, $\frac{12}{40}$ ushtruan për sulmues, kurse të tjerët u përgatitën për arbitra. Shprehni thyesat në përqindje dhe caktoni sa përqind e nxënësve kishin dëshirë të bëheshin arbitra?

Mbledhja e thyesave

Thyesat janë pjesë e rëndësishme në matematikë dhe i përdorim në rutinën ditore, për shembull, gjatë matjes së përbërësve për gjellën, ndarjen e sasive, njehsimit të largësisë. Në këtë njësi mësimore do të mësoni si me korrektësi t'i mbledhni thyesat, madje edhe kur kanë emëruesit e ndryshëm. Këto njohuri do të ndihmojnë në hulumtimin e mëtejshëm në matematikë, në veçanti gjatë punës me përqindje, proporcione dhe në temën e algjebërës.



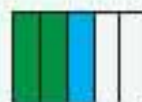
Shembulli 1

Në orkestrën e një shkolle fillore $\frac{2}{5}$ e nxënësve luanin në violinë, kurse $\frac{1}{5}$ luanin në violë. E sata pjesë e nxënësve luanin në këto instrumenta me tela?

Zgjidhje:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

Pra, $\frac{3}{5}$ e nxënësve luanin në ndonjërin prej këtyre instrumenteve me tela.



Detyra 1

Në një shitore, paradite, u shitën $\frac{3}{10}$ e një ruli pëlhureje, kurse pasdite $\frac{1}{10}$ më shumë se sa paradite. E sata pjesë e rulit të pëlhurës është shitur gjatë gjithë ditës?

Shembulli 2

Fusha sportive e një shkolle ishte ndarë në disa pjesë. $\frac{1}{2}$ e kësaj fushe shfrytëzohej për basketboll, kurse $\frac{1}{3}$ për tenis. E sata pjesë e fushës sportive përdorej për aktivitetet sportive basketboll dhe tenis?

Zgjidhje:

Si ta caktojmë shumën e thyesave $\frac{1}{2}$ dhe $\frac{1}{3}$? Që të mbledhim dy thyesa me emërues të ndryshëm, fillimisht duhet t'i kthejmë në thyesa me emërues të përbashkët të njëjtë që, natyrisht, mund të jetë edhe shumëfishi i tyre më i vogël i përbashkët i emëruesve të thyesave të dhëna. $\text{SHMV}(2,3) = 6$.
 $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ dhe $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$. Tani thyesat kanë emërues të njëjtë dhe mund t'i mbledhim:
 $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Domethënë, $\frac{5}{6}$ e fushës sportive përdorej për basketboll dhe tenis.

Dy thyesa me emërues të ndryshëm mbledhen, fillimisht, duke i kthyer në thyesa me emërues të njëjtë, e më pas i mbledhim siç mbledhen thyesat e tilla.

Detyra 2

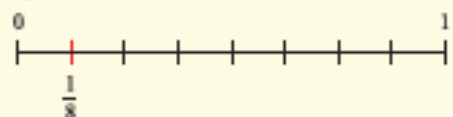
Njehsoni: a) $\frac{3}{10} + \frac{2}{9}$ b) $\frac{5}{16} + \frac{3}{3}$ c) $\frac{4}{9} + \frac{3}{11}$

Nëse ka nevojë që të caktojmë shumën e thyesave pa llogaritje, atëherë themi se jemi duke vlerësuar rezultatin e mbledhjes.

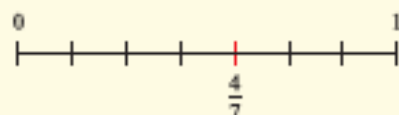
Shembulli 3

Vlerësoni sa është: a) $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$?

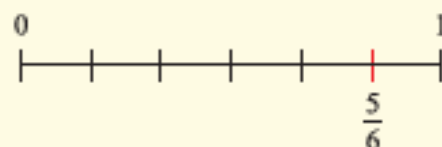
Zgjidhje:



Nga drejtëza numerike shihet se thyesa $\frac{1}{8}$ është më afër 0, numëruesi është më i vogël se gjysma e emëruesit. Në këtë rast thyesa rrumbullakohet në 0.



Nga drejtëza numerike shihet se $\frac{4}{7}$ është afër $\frac{1}{2}$, ose numëruesi është përafërsisht sa gjysma e emëruesit. Në këtë rast thyesa rrumbullakohet në $\frac{1}{2}$.



Nga drejtëza numerike shihet se $\frac{5}{6}$ është afër me 1, ose numëruesi është përafërsisht sa emëruesi. Në këtë rast thyesa rrumbullakohet në 1.

Duke shfrytëzuar me sa shkruam më sipër, kemi:

- a) Sipas figurave me drejtëza numerike dhe vlerat e përafërta (të vlerësuar) fitohet se $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ është thyesë e përafërt me $\frac{1}{2}$.
 b) Në këtë rast shuma $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$ është përafërsisht 1.

Detyra 3

Vlerësoni: a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ b) $\frac{9}{10} + \frac{1}{6}$

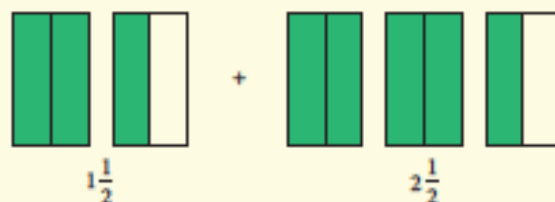
Shembulli 4

Njehsoni $1\frac{1}{2}$ dhe $2\frac{1}{2}$.

Zgjidhje:

Numrat e përzier mund t'i mbledhim në dy mënyra.

Mënyra e I: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ veçmas mbledhim pjesët e plota e veçmas thyesat
 $= (1 + 2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4.$



Mënyra e II: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ numrat e përzier i shkruajmë si thyesa të parregullta $= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

Shembulli 5

Nga një rrotë kaçkavalli u shitën $5\frac{1}{2}$ kg. Nga rrota e kaçkavallit mbetën edhe $2\frac{1}{4}$ kg. Sa kilogramë ishte rrota e kaçkavallit?

Zgjidhje:

Mënyra I: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = (5 + 2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 7 + \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = 7 + \left(\frac{3}{4}\right) = 7\frac{3}{4}$ kg.

Mënyra II: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = \frac{11}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4} = \frac{22}{4} + \frac{1}{4} = \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$ kg.

Pra, rrota e kaçkavallit në fillim kishte masën $7\frac{3}{4}$ kg.

Detyra 4

Njehsoni: a) $4\frac{2}{5} + 3\frac{1}{15}$ b) $10\frac{2}{7} + 3\frac{1}{8}$ c) $4\frac{5}{14} + 15\frac{8}{21}$

Shembulli 6

Një biçiklist orën e parë kaloi 28 km, orën e dytë $2\frac{7}{15}$ km më shumë se sa orën e parë, kurse orën e tretë $3\frac{1}{30}$ km më shumë se sa orën e parë. Sa kilometra ka kaluar biçiklisti për të tri orët?

Zgjidhje:

Orën e parë ka kaluar 28 km, orën e dytë $28\text{ km} + 2\frac{7}{15}\text{ km}$ dhe orën e tretë $28\text{ km} + 3\frac{1}{30}\text{ km}$. Pasi kërkohet numri i përgjithshëm i kilometrave të kaluara për tri orë, fitojmë:

$$28 + (28 + 2\frac{7}{15}) + (28 + 3\frac{1}{30}) = (28 + 28 + 28 + 2 + 3) + (\frac{7}{15} + \frac{1}{30}) = 89 + (\frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{1}{30}) = 89 + (\frac{14}{30} + \frac{1}{30}) = 89 + \frac{15}{30} = 89 + \frac{15 \cdot 15}{30 \cdot 15} = 89 + \frac{1}{2} = 89\frac{1}{2}\text{ km}$$

Pra, biçiklisti për tri orë ka kaluar $89\frac{1}{2}\text{ km}$.

Detyra 5

Sa është gjatësia e një trau nga i cili janë prerë katër copë me gjatësi 2 m, $1\frac{1}{3}$ m, $5\frac{1}{2}$ m dhe $\frac{5}{6}$ m?

Në një shitore ka dy lloje çokollate: çokollatat e njërit lloj kanë masën sa $\frac{3}{4}$ e masës standarde, kurse çokollatat e llojit tjetër kanë masën sa $\frac{5}{6}$ e masës standarde. Nëse blen nga një çokollatë të dy llojeve, a do të fitosh masë më të madhe ose më të vogël se masa standarde e 1 çokollate? Si mund ta njehsosh këtë?

Detyrën e zgjidh në fletoren tënde, e më pas përgjigjet dhe strategjinë e zgjidhjes e ndan me shokët e klasës.

1. Njehso $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$.
2. Ana ka $\frac{3}{5}$ e kursimeve të përbashkëta, kurse Petri ka $\frac{2}{7}$ e kursimeve. Pjesa e mbetur e kursimeve është e Dianës. Të satën pjesë të kursimit e kanë së bashku Petri dhe Ana?
3. Njehsoni: $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}$.
4. Nëse keni $\frac{5}{4}$ çokollatë dhe akoma $\frac{1}{3}$ çokollatë, atëherë sa çokollatë keni gjithsej? Radhitni shkronjat nga tabela sipas radhës së zgjidhjeve të detyrave që të caktoni fjalën e fshehur.

$3\frac{11}{12}$	$1\frac{7}{15}$	$1\frac{7}{12}$	$\frac{31}{35}$
M	Sh	A	U

Punë e pavarur

1. Shumën e thyesave $\frac{1}{12}$ dhe $\frac{5}{28}$ zmadhoni për thyesën $\frac{1}{14}$.
2. Shumën e thyesave $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ dhe $\frac{4}{15}$, zmadhoni për shumën e thyesave $\frac{1}{16}$ dhe $\frac{5}{18}$.
3. Një traktorist, ditën e parë, lëvroi $\frac{4}{15}$ e arës, ditën e dytë $\frac{7}{20}$ dhe ditën e tretë $\frac{7}{30}$ e arës. Sa pjesë të tërë arës lëvroi traktoristi?
4. Sa është shuma e katër numrave nëse i pari është $2\frac{3}{5}$, kurse secili mbledhës i radhës është për $2\frac{1}{3}$ më i madh se pararendësi i tij?
5. Një grup minatorësh të hënënxorrën $123\frac{2}{9}$ t qymyr, të martën $151\frac{5}{6}$ t, të mërkurën $128\frac{2}{4}$ t, të enjten $130\frac{7}{12}$ t dhe të premten 149 t qymyr. Sa tonelata qymyr nxorrën ata përgjatë pesë ditëve?
6. Një eskavator hap një pusëtë për 10 orë, kurse një tjetër eskavator të njëjtën pusëtë e hap për 15 orë. Caktoni:
 - a) Të satën pjesë të pusëtës të dy eskavatorët, bashkërisht, do ta hapnin për një orë?
 - b) Për sa orë të dy eskavatorët, bashkërisht, do ta hapnin gjithë pusëtën?

Zbritja e thyesave

Në njësinë paraprake mësuat se si t'i mbledhni thyesat, kurse në këtë njësi do të mësoni si t'i zbritni ato. Imagjinoni se keni një çokollatë të plotë të ndarë në tetë pjesë të barabarta.

Nëse i hani 3 pjesë, sa do të mbesin? Ky është një shembull i zbritjes së thyesave, ku fillojmë me një numër të caktuar pjesësh dhe heqim disa prej tyre. Përmes shembujve të përditshmërisë do të kuptoni arsyen pse këto dije janë të dobishme dhe si mund t'i përdorni ato në raste praktike.



Shembulli 1

Në diagramin rrethor është treguar se si Ajsheja e ndan kohën përgjatë një dite. Të satën pjesë të ditës Ajshe nuk flen?

Aktivitetet ditore të Ajshe (24 h)



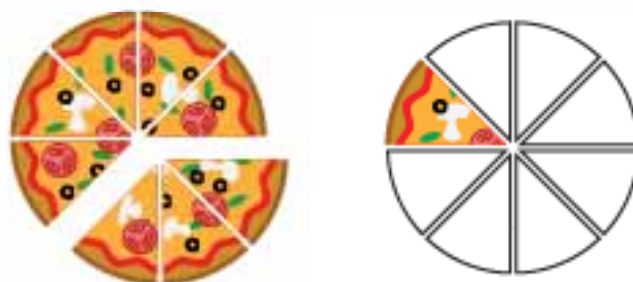
Zgjidhje:

Nga diagrami rrethor mund të vëreni se Ajsheja fle $\frac{3}{8}$ e ditës, kurse $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ nuk fle. Në rezultatin e njëjtë mund të arrish edhe në një mënyrë tjetër.

Nëse një ditë paraqitet si një tërësi, kemi: $1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Shpjegoni pse në vend të 1 shkruajmë $\frac{8}{8}$.

Shembulli 2

Në vizatim janë dhënë pica. Nga njëra picë është marrë pjesa e shënuar. E sata pjesë e picave ka mbetur?



Zgjidhje:

Sipas vizatimit kemi $1\frac{1}{8}$ pica nga e cila është marrë pjesa e shënuar që paraqet $\frac{3}{8}$. Shkruajmë $1\frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Pra, ka mbetur $\frac{3}{4}$ e picave.

Detyra 1

Gjeni ndryshimin:

a) $\frac{19}{23} - \frac{5}{23} - \frac{7}{23}$ b) $\frac{27}{25} - \frac{9}{25} - \frac{3}{25}$ c) $\frac{14}{17} - \frac{1}{17}$

Detyra 2

Njehsoni: a) $4 - 1\frac{1}{5}$ b) $3\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5}$

Shembulli 3

Për një shfaqje teatri janë shitur bileta për $\frac{6}{7}$ e ulëseve të shtëpisë së teatrit. Për shkak të motit të keq, u mbushën vetëm $\frac{4}{5}$ e ulëseve. Sa pjesë të ulëseve, nga i gjithë numri i ulëseve për të cilat ishin shitur biletat, mbetën zbrazur?

Zgjidhje:

Që të kaktosh se sa është pjesa e ulëseve për të cilat u shitën bileta të shfaqes teatrore dhe nuk u mbushën për shkak të motit të keq, duhet të gjesh ndryshimin e dy thyesave, përkatësisht $\frac{6}{7} - \frac{4}{5}$. Sikur gjatë mbledhjes së thyesave me emërues të ndryshëm, ashtu edhe gjatë zbritjes së thyesave me emërues të ndryshëm fillimisht duhet t'i kthejmë thyesat deri në emërues të përbashkët. Mes emëruesve të përbashkët mund të marrim, natyrisht, edhe shumëfishin më të vogël të përbashkët, me qëllim që gjatë zgjerimit të thyesave të punoni me numra sa më të vegjël: SHVP(7,5) = 35.

$$\frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{30}{35} - \frac{28}{35} = \frac{2}{35}.$$

Pra, për shkak të motit të keq, $\frac{2}{35}$ e ulëseve për të cilat ishin shitur bileta, mbetën të zbrazëta.

Dy thyesa me emërues të ndryshëm zbriten ashtu që fillimisht i kthejmë deri me emërues të njëjtë, e më pas i zbresim sikur thyesat me emërues të njëjtë.

Shembulli 4

Njehsoni: a) $3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7}$ b) $4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6}$

Zgjidhje:

Ndryshimin e thyesave mund ta gjejmë në dy mënyra.

$$\text{a) Mënyra I: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = (3 - 1) + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = 2 + \left(\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 5}\right) = 2 + \left(\frac{21}{35} - \frac{5}{35}\right) = 2 + \frac{16}{35} = 2\frac{16}{35}$$

$$\text{Mënyra II: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = \frac{18}{5} - \frac{8}{7} = \frac{18 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{8 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{126}{35} - \frac{40}{35} = \frac{86}{35} = 2\frac{16}{35} \quad \text{SHVP}(5,7) = 35.$$

$$\text{b) Mënyra I: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = (4 - 1) + \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{10}{12}\right) = 3 + \left(-\frac{3}{12}\right) = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$$

$$\frac{7}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{19}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{9}{12} = 2\frac{3}{4}$$

Në procedurën e zbritjes fitojmë $\frac{7}{12} < \frac{10}{12}$, prandaj kemi "marrim një të plotë" nga e tëra e zbritësit, e shkruajmë si $\frac{12}{12}$ dhe ia shtojmë thyesës $\frac{7}{12}$. Kështu fitojmë $\frac{19}{12}$.

Shikoni procedurën edhe një herë.

$$\text{Mënyra II: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{55}{12} - \frac{22}{12} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \quad (\text{Pse } \frac{33}{12} = \frac{11}{4}?)$$

Detyra 3

Cili numër i rritur për $\frac{3}{5}$ jep $\frac{2}{3}$?

Detyra 4

Njehsoni: a) $4\frac{5}{6} - 3\frac{1}{3}$ b) $3\frac{4}{9} - 2\frac{5}{6}$ c) $5\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12} - 2\frac{3}{4}$

Shembulli 5

Ana kishte $4\frac{2}{3}$ kilogramë miell. Për të përgatitur biskota ka përdorur $2\frac{5}{6}$ kilogramë miell. Sa miell i ka mbetur?

Zgjidhje:

$$4\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6} = \frac{22}{3} - \frac{17}{6} = \frac{22 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{17 \cdot 1}{6 \cdot 1} = \frac{44}{6} - \frac{17}{6} = \frac{44-17}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ kg}$$

Anës i ka mbetur edhe $1\frac{1}{2}$ kg miell.

Detyra 5

Martini ec çdo mëngjes $5\frac{3}{4}$ kilometra. Një mëngjes eci një kohë të caktuar dhe ndaloj pasi kishte kaluar $2\frac{2}{3}$ kilometra. Edhe sa kilometra duhet të bëjë duke ecur që të arrij numrin e kilometrave që zakonisht e arrin për çdo mëngjes?

Pse është e rëndësishme të dimë të zbresim thyesat me emërues të ndryshëm në përditshmërinë tonë? A mund të jepni një shembull nga një situatë reale ku kjo dije do të zinte vend?

◇ Mendoni për njohuritë e tua dhe përgjigju në fletore me

☒ , ? ose X:

☒ - Kuptoj shkëlqyeshëm dhe mund të punoj dhe zgjidh detyra në mënyrë të pavarur.

? - Kuptoj pjesërisht, por kam nevojë për më shumë ushtrime.

X - Akoma nuk jam i sigurt dhe më duhet ndihmë plotësuese.

1. Mund të zbres thyesa me emërues të njëjtë.
2. Mund të gjej emërues të përbashkët për thyesat me emërues të ndryshëm.
3. Mund të zbres me korrektësi thyesa me emërues të ndryshëm.
4. Mund të zbres numra të përzier.
5. Mund të zbatoj zbritjen e thyesave në situata reale.

Punë e pavarur

- Njehsoni: a) $2 - \frac{4}{7}$ b) $3\frac{1}{2} - 2$ c) $3 - 1\frac{7}{12}$ ç) $5\frac{7}{9} - 5$
- Njehsoni: a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ b) $\frac{8}{9} - \frac{7}{12}$ c) $\frac{1}{10} - \frac{1}{15}$ ç) $\frac{27}{40} - \frac{7}{18} - \frac{5}{24}$ d) $\frac{3}{2} - (\frac{5}{6} - \frac{2}{3})$
- Cili numër duhet t'i shtohet ndryshimit të numrave $4\frac{5}{8}$ dhe $2\frac{3}{4}$ që të fitohet $7\frac{5}{9}$?
- Cili numër duhet t'i minusohet shumës së numrave $11\frac{7}{8}$ dhe $13\frac{5}{12}$ që të fitohet 19?
- Një bujk ditën e parë lëvroi $\frac{2}{3}$ e arës, kurse ditën e dytë $\frac{1}{4}$. E sata pjesë e arës i ka mbetur pa lëvruar?
- Një basen mbushet me ujë me dy gypa, kurse zbrazet nga gypi i tretë. Gypi i parë e mbush për 8 orë, i dyti e mbush për 12 orë, kurse gypi i tretë e zbraz për 6 orë.
 - Cila pjesë e basenit do të mbushet për një orë nga dy gypat e parë?
 - Sa orë duhet që të mbushet i gjithë baseni?
 - E sata pjesë e basenit do të jetë plot me ujë për një orë, nëse dy gypa e mbushin kurse i treti e zbraz?
- Një këmbësor kaloi 28 km për 6 orë, kurse një biçiklist 33 km për 3 orë. Sa kilometra më shumë për një orë kalon biçiklisti kundrejt këmbësorit?

Shumëzimi i thyesave

Në këtë njësi mësimore do të mësoni si t'i shumëzoni thyesat. Thyesat të ndihmojnë të paraqesësh pjesë të tërësisë, kurse shumëzimi i thyesave tregon se si të njehsoni pjesë nga pjesa ose se si t'i kombinoni pjesët. Do të filloni me të kuptuarit e rregullave bazike për shumëzimin e thyesave dhe do të shihni se si mund ta thjeshtoni rezultatin. Do të hulumtoni shembuj nga përditshmëria, sikurse është copëtimi i petës ose matja e përbërësve gjatë gatimit, që më lehtë të kuptoni pse ky njehsim është i rëndësishëm.



Shembulli 1

Shuma e mbledhësve të njëjtë mund të shkruhet shkurtimisht si:

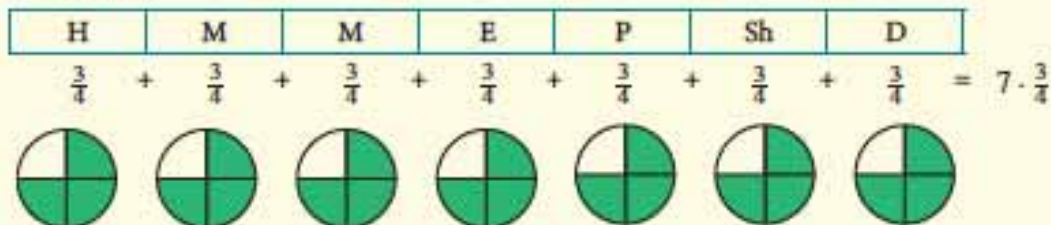
$$7 + 7 = 2 \cdot 7 \quad 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 \quad \frac{7 + 7 + 7 \dots + 7}{n\text{-mbledhës}} = n \cdot 7$$

Shembulli 2

Simona trajnohej për tenis $\frac{3}{4}$ e orës çdo ditë. Sa orë gjithsej ajo u trajnua për një javë?

Zgjidhje:

Ditët e javës



Kemi: $7 \cdot 3$ të katërta është 21 të katërta. Shkruajmë $7 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Domethënë, Simona në një javë u trajnua $5\frac{1}{4}$ orë.

Thyesa $\frac{a}{b}$ shumëzohet me numrin natyror n ashtu që numëruesin e thyesës e shumëzojmë me numrin natyror n , kurse emëruesin e përshtojmë, gjegjësisht:

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

Detyra 1

Në katër shishe kishte nga $\frac{7}{8}$ l lëng. Sa litra lëng gjithsej kishte në katër shishet?

Kur shumëzoni numrin natyror me thyesë, duhet bërë kujdes të mos e harroni pikën si shenjë për shumëzimin sepse shumëzimi i numrit natyror dhe thyesës në mungesë të shenjës nuk mund të dallohet nga numri i përzier.

Nëse numri natyror n dhe emëruesi b i thyesë $\frac{a}{b}$ kanë pjesëtues të përbashkët, mund t'i thjeshtoni përpara se t'i shumëzoni dhe njehsimet mund t'i kryeni me numra më të vegjël.

Shembulli 3

Njehsoni produktin $6 \cdot 1\frac{5}{9}$.

Zgjidhje:

$$6 \cdot 1\frac{5}{9} = \text{numrin e përzier e shkruajmë si thyesë të parregullt} = 6 \cdot \frac{14}{9} = \frac{6 \cdot 14}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

Detyra 2

Shkruani për secilën figurë sikurse në shembullin nën a).



$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$



Shembulli 4

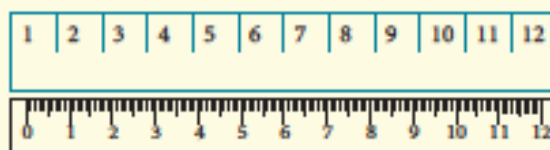
Markoja është 12 vjeç, kurse Sara ka $\frac{3}{4}$ e moshës së Markos. Sa vjeçe është Sara?

Zgjidhje:

Që të gjejmë $\frac{3}{4}$ e 12, mund të ndërmarrim katër hapat vijues:

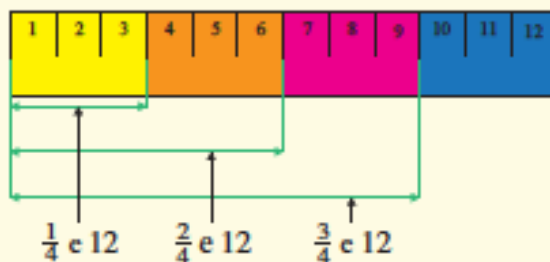
Hapi I:

Marrim një shirit 12 cm. E ndajmë në pjesë me gjatësi 1 cm si në figurë.



Hapi II:

Shiritin e ndajmë në 4 pjesë të barabarta dhe secilën pjesë e ngjyrosim me ngjyra të ndryshme, si në figurë.



Hapi III:

Duke shfrytëzuar shiritin, i mbushim katrorët e vegjël.

$$\frac{1}{4} \text{ e } 12 = 3, \quad \frac{2}{4} \text{ e } 12 = 6, \quad \frac{3}{4} \text{ e } 12 = 9$$

Hapi IV:

$$\frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \quad \frac{2}{4} \cdot 12 = 6 \quad \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

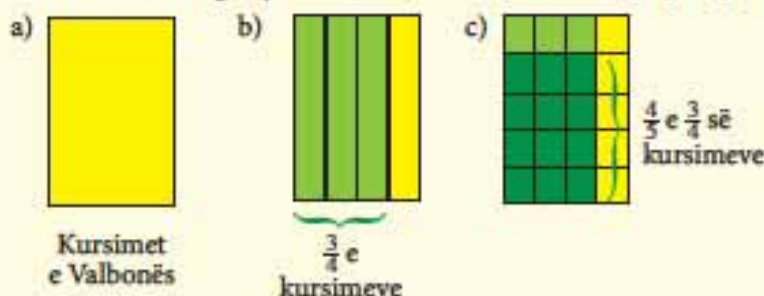
Pjesa $\frac{a}{b}$ e numrit x është produkti $\frac{a}{b} \cdot x$.

Shembulli 5

Valbona shkoi për të bërë pazar dhe me vete mori $\frac{3}{4}$ e kursimeve. $\frac{4}{5}$ e parave që kishte marrë i harxhoi për suvenirë. Të satën pjesë të kursimeve e harxhoi Valbona për suvenirë?

Zgjidhje:

Valbona harxhoi $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$ së kursimeve. Me vizatime është paraqitur zgjidhja e problemit.



Sipas vizatimit nën c) $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$ të kursimeve që Valbona i harxhoi është paraqitur me $4 \cdot 3$ e gjithsej $5 \cdot 4$ drejtkëndëshave të vegjël ose 12 e gjithsej 20 drejtkëndëshave.

Shkruajmë: $\frac{12}{20}$. E dimë se $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$ mund të shkruhet edhe si $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Sipas shembullit,

Produkti i dy thyesave është thyesë numëruesi i së cilës është produkti i numëruesve të thyesave shumëzuese, kurse emëruesi është produkt i emëruesve të thyesave shumëzuese.

Shembulli 6

Në festën e organizuar për datëlindjen e Mites ishin blerë $5\frac{2}{3}$ litra lëngje. Nga to u harxhuan $\frac{2}{3}$ litra lëngje e sasisë së përgjithshme të lëngut. Sa litra lëngje u harxhuan?

Zgjidhje:

$$\frac{2}{3} \text{ e } 5\frac{2}{3} \text{ është } \frac{2}{3} \cdot 5\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{17}{3} = \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 3} = \frac{34}{9} = 3\frac{7}{9}$$

Pra, për festën e datëlindjes u harxhuan $3\frac{7}{9}$ litra lëngje. Që të kryhet shumëzimi, fillimisht numrin e përzier e shkruajmë si thyesë të parregullt, Si do të vepronit nëse do të duhej të shumëzonit dy numra të përzier?

Si do të mund të përdorej aftësia e shumëzimit të thyesës me numër të përzier në jetën reale, për shembull, gjatë ndarjes së ushqimit, materialeve ose gjatë planifikimit të aktiviteteve? Shpjegoni me shembull konkret.

Përgjigju, në fletoren tënde, pyetjeve në vijim.

1. A kuptova çka është thyesa dhe si shumëzohet ajo me numër natyror? Po/Jo
2. A mund ta shndërroj një numër të përzier në thyesë të parregullt dhe anasjelltas? Po/Jo
3. A arrita të zgjidh detyra me shumëzim të thyesave me numra të përzier? Po/Jo
4. A mund t'i zbatoj rregullat për shumëzim të thyesave në situata reale (për shembull, gjatë ndarjes së ushqimit, materialeve e të ngjashme)? Po/Jo

Nëse me "Po" je përgjigjur në shumicën e pyetjeve, atëherë kjo do të thotë se mirë e ke kuptuar njësinë mësimore.

Nëse me "Jo" je përgjigjur në disa nga pyetjet, atëherë kjo do të thotë se duhet t'i përsëritësh ato pjesë që të përmirësosh të kuptuarit e njësisë.

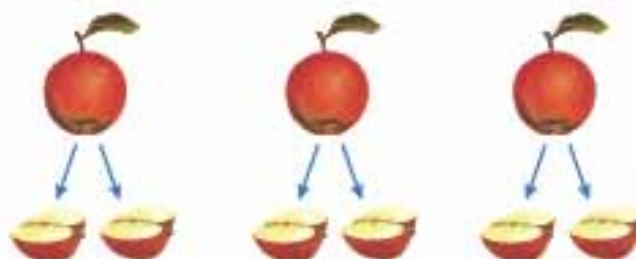
Nënvizo çka ishte më e vështirë në këtë njësi mësimore dhe në çka do të kishe punuar akoma.

Punë e pavarur

1. Njehsoni: a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ b) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$ c) $\frac{3}{10} \cdot 1\frac{1}{9}$ ç) $3\frac{1}{8} \cdot 1\frac{4}{15}$
2. Nga gjithsej 36 nxënës $\frac{2}{9}$ janë vajza. Sa prej numrit të përgjithshëm të nxënësve janë vajza e sa janë djem?
3. Tregoni se produkti i thyesave $\frac{1}{2}$ dhe $\frac{1}{3}$ është i barabartë me ndryshimin e tyre.
4. Njehsoni syprinën e drejtkëndëshit me brinjë $4\frac{1}{3}$ cm dhe $3\frac{1}{3}$ cm.
5. Cila vlerë është më e madhe:
 - a) $\frac{3}{5}$ e 150 ose $\frac{5}{9}$ e 180?
 - b) $\frac{3}{4}$ e $2\frac{2}{9}$ ose $\frac{4}{5}$ e $3\frac{3}{4}$?
6. Njehsoni:
 - a) $\frac{3}{5} \cdot (\frac{2}{3} + \frac{3}{4})$
 - b) $(1\frac{3}{8} + 2\frac{1}{6}) \cdot 1\frac{3}{5}$
 - c) $(4 - 2\frac{5}{6}) \cdot 2\frac{2}{3}$
 - ç) $1\frac{3}{4} \cdot (1\frac{1}{7} - \frac{3}{14})$
7. Petri ushtroi në atë mënyrë që: fillimisht vrapoi $\frac{4}{9}$ e shtegut rrethor të vrapimit, e më pas e ngau biçikletën $\frac{2}{3}$ e shtegut rrethor. Nga e gjithë gjatësia që kaloi, $\frac{2}{5}$ e saj e kaloi nën hije.
 - a) Sa herë e përshkoi shtegun rrethor (sa rrathë, gjithsej, përshkoi)?
 - b) Të satën pjesë të shtegut rrethor e kaloi nën hije?

Pjesëtimi i thyesave

Në këtë njësi mësimore do të përqendrohemi në pjesëtimin e thyesave, që do t'u ndihmojë të zbatoni konceptin e pjesëtimin në situata praktike. Imagjinoni se keni 3 mollë dhe ato janë të ndara përgjysmë secila. Sa njerëz do të merrnin nga një gjysmë molle? Që t'i përgjigjeni kësaj pyetjeje, në fakt, duhet të gjeni herësin $3 : \frac{1}{2}$. Ky është vetëm një shembull i thjeshtë se si përdorim pjesëtimin e thyesave në jetën tonë. Në këtë njësi do të ushtroni në shembuj konkret, që do të ndihmojë t'i përmirësoni aftësitë tuaja në lidhje me pjesëtimin.



$$3 : \frac{1}{2} = 6$$

Shembulli 1

Vesna kishte $\frac{4}{5}$ e një torteje. Ajo hëngri $\frac{1}{3}$ e pjesës së saj të tortës. Të satën pjesë të tortës e hëngri ajo? Paraqit përgjigjen tënde edhe me diagram.

Detyra 1

- Sa grupe me nga 2 portokaj mund të bëni prej 6 portokajve? Shkruani zgjidhjen me operacionin e duhur matematik.
- Sa të katërta ka një gjysmë? Me cilin operacion matematik mund ta paraqitni zgjidhjen?

Shembulli 2

Njehsoni: a) $3 \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2}$ c) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$

Zgjidhje:

$$\text{a) } 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{b) } \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 2} = \frac{14}{14} = 1 \quad \text{c) } 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{21}{21} = 1$$

Në shembullin e dhënë është e qartë se numëruesi i thyesës së parë është emëruesi i thyesës së dytë dhe emëruesi i thyesës së parë është i barabartë me numëruesin e thyesës së dytë. Produkti i thyesave të tilla është 1.

Thyesa reciproke janë dy thyesa produkti i të cilave është 1.

Detyra 2

Shkruani thyesat reciproke të: $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{10}$, 5, $4\frac{3}{5}$, $\frac{21}{25}$.

Shembulli 3

Natalia dhe Petri duhej të ndanin $\frac{4}{5}$ e një çokollate në pjesë të barabarta.

Natalia veptroi si në vijim: 4 të pestat i ndau me 2 dhe secili fitoi 2 të pesta.

Shkroi: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{2}{5}$



Petri veptroi me sa vijon: çdo të pestë e ndau në dy pjesë të barabarta dhe nga çdo e pestë fitoi nga dy të dhjeta.

Pra, secili fitoi nga 4 të dhjeta.

Shkroi: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$



Natalia dhe Petri me të dy mënyrat e zgjidhjes fituan pjesë të njëjta të çokollatës. Pra, thyesa mund të pjesëtohet me numër natyror në dy mënyra: numëruesi i saj të pjesëtohet me atë numër ose emëruesi i saj të shumëzohet me atë numër, përkatësisht:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b} \text{ ose } \frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}.$$

Shembulli 4

Njehsoni $\frac{2}{7} : 3$.

Zgjidhje:

Mënyra I: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2 \cdot 3}{7}$

Mënyra II: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$

Pasi te mënyra e parë numëruesi nuk është i pjesëtueshëm me numrin natyror, më praktike do të ishte mënyra e dytë. Prandaj, mund të thuhet se mënyra e dytë ka zbatim më të gjerë.

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}, \text{ ku } \frac{1}{n} \text{ është thyesa reciproke e } n.$$

Thyesa pjesëtohet me numër natyror ashtu që ajo shumëzohet me vlerën reciproke të numrit natyror.

Shembulli 5

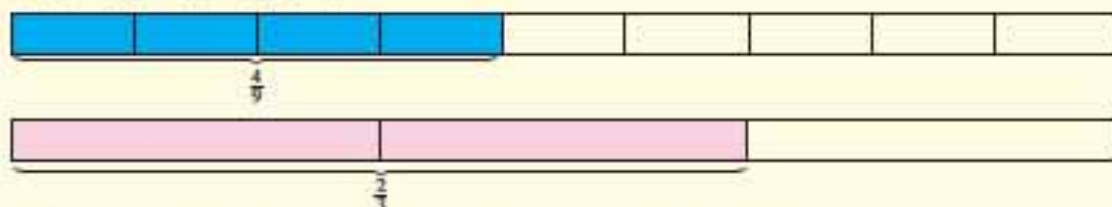
Iliri duhej të njehsonte:

a) $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

Zgjidhje:

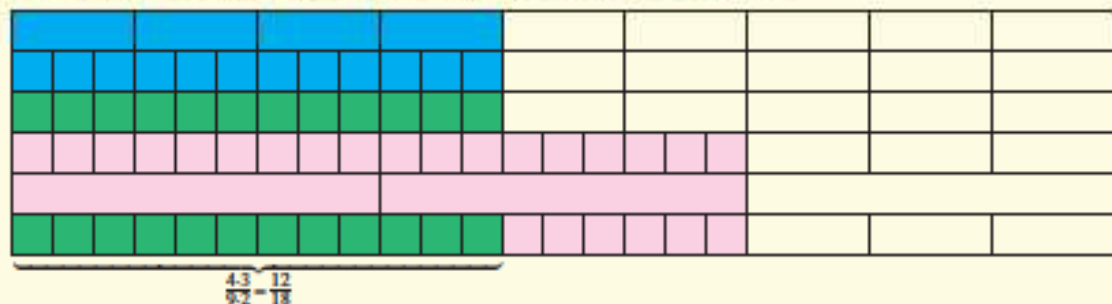
- a) Iliri dinte si shumëzohen dy thyesa dhe se pjesëtimi është operacion i kundërt i shumëzimit dhe njehsoi me sa vijon: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. Që të sigurohet se procedura e ndjekur është e saktë, ai bëri kontrollin, provën $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$.

U përpoq edhe me diagrame. Gjatë kësaj, sipas operacionit që duhet ta kryente, kërkoi përgjigje në pyetjen "Sa $\frac{2}{3}$ ka në $\frac{4}{9}$?" Përgjigjen e kësaj pyetjeje e fitoi kur përcaktoi sa nga e gjithë pjesa e ngjyrosur me vjollcë mbulon plotësisht pjesën me ngjyrë të kaltër. Kështu e fitoi pjesën e ngjyrosur me ngjyrë të gjelbër, që paraqet $\frac{12}{18}$. Më pas thyesën e fituar e thjeshtoi dhe fitoi $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$, që do të thotë se fitoi rezultatin e njëjtë si në rastin e parë. Shpjegoni se si diagrami i Ilirit është i lidhur me të shkruarit e pjesëtimit të dy thyesave.



Secila nga katër të nëntat ndahet në të treta = $4 \cdot 3$ pjesë = 12 pjesë.

Ka nga 9 pjesë të tilla në secilën prej dy të tretave = $9 \cdot 2 = 18$ pjesë.



Nga diagrami vërejtë se kjo mund të shkruhet si shumëzim, respektivisht se thyesa - i pjesëtueshmi është shumëzuar me thyesën reciproke të thyesës - pjesëtuesit.

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

shumëzim me thyesën reciproke të $\frac{2}{3}$

- b) Iliri u mundua që të përdor mënyrën e parë si nën a), respektivisht shkroi $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$, por arriti në një situatë ku gjatë pjesëtimit nuk fitohet numër i plotë as në numërues as në emërues, prandaj njehsoi në mënyrën e dytë $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9}$. Përsëri mund të përfundojmë se gjatë pjesëtimit të thyesës me thyesë më praktike është i pjesëtueshmi të shumëzohet me thyesën reciproke të pjesëtuesit.

Thyesa pjesëtohet me thyesë ashtu që të pjesëtueshmin e shumëzojmë me thyesën reciproke të pjesëtuesit, përkatësisht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Detyra 3

Njehsoni: a) $1\frac{1}{6} : 3$ b) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ ç) $\frac{7}{12} : \frac{3}{5}$

Shembulli 6

E ëma e Kirosh për $3\frac{1}{4}$ kg miell harxhoi 260 denarë. Sa kushton 1 kg miell?

Zgjidhje:

Paratë e harxhuara pjesëtohen me kilogramët e blerë të miellit. Kemi:

$$260 : 3\frac{1}{4} = 260 : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} \cdot \frac{4}{13} = \frac{260 \cdot 4}{1 \cdot 13} = \left\{ \frac{260 \cdot 13}{13 \cdot 13} = \frac{20}{1} \right\} \cdot 4 = \frac{20 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{80}{1} = 80$$

260 dhe 13 mund të
thjeshtohen me 13

Pra, 1 kg miell kushton 80 denarë.

Detyra 4

Bojani ka pjesë dërrasash me gjatësi $\frac{2}{7}$ m. Dëshiron të ndërtojë një shtëpizë në pemë me dritare me gjatësi $\frac{4}{5}$ m. Sa copa dërrasash prej $\frac{2}{7}$, do të ketë në gjatësinë prej $\frac{4}{5}$ m?

Nëse dini se si të shumëzoni dhe si të pjesëtoni numrat e plotë, pse mendoni se gjatë pjesëtimit të thyesave na duhet të përdorim shumëzimin? Mendimin tuaj shpjegoni me ndonjë shembull.

Në fletore përgjigjuni pyetjeve.

1. A e kuptoj rregullën për pjesëtimin e thyesave?

- Po, di se të pjesëtueshmin duhet ta shumëzoj me thyesën reciproke të pjesëtuesit.
- Pjesërisht, më duhet edhe pak ushtrime.
- Jo, akoma nuk e kam të qartë dhe kam nevojë për sqarime shtesë.

2. A mundem në mënyrë të pavarur të zgjidh detyra me pjesëtim të thyesave?

- Po, mundem pa gabim.
- Mundem, por herë – herë edhe gaboj.
- Vështirë më vjen dhe nuk di nga t'ia filloj.

3. A mund të shpjegoj pse gjatë pjesëtimit të thyesave përdorim shumëzimin?

- Po, mund ta shpjegoj me fjalët e mia.
- Pjesërisht, kuptoj, por nuk di si ta shpjegoj.
- Jo, akoma nuk e kam të qartë.

4. Si ndjehem në raport me njësinë e sotme?

- Jam i/e sigurt në dijet e mia.
- Më duhet edhe pak të ushtroj.
- Kjo më ra vështirë, më duhet ndihmë.

Nëse më shumë përgjigje janë nga përgjigjet e para të ofruara të pyetjeve, kjo do të thotë se e ke përvetësuar mirë njësinë mësimore.

Nëse më shumë përgjigje janë nga përgjigjet e dyta të ofruara të pyetjeve, atëherë të duhet akoma edhe ca ushtrime.

Nëse më shumë përgjigje janë nga përgjigja e tretë e ofruar e pyetjeve, atëherë të duhet mbështetje dhe shpjegime plotësuese.

Punë e pavarur

1. Njehsoni:

a) $\frac{4}{5} : 2$ b) $\frac{3}{4} : 3$ c) $\frac{4}{9} : 6$ ç) $3\frac{3}{8} : 9$ d) $5\frac{4}{7} : 9$

2. Njehsoni herësin:

a) $\frac{12}{25} : \frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ c) $2 : \frac{1}{4}$ ç) $1\frac{11}{12} : \frac{9}{14}$ d) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ dh) $6\frac{8}{9} : 4\frac{1}{12}$

3. Njehsoni:

a) $(1 - \frac{3}{4}) : \frac{5}{16}$ b) $(2\frac{7}{12} - 1\frac{1}{2}) : 2\frac{3}{11}$ c) $\frac{9}{14} : (1\frac{2}{7} + 1\frac{1}{3})$

4. Për $3\frac{3}{4}$ kg mollë është bërë pagesë prej 300 denarësh. Sa denarë kushton një kilogram mollë?

5. Një paketim sheqer nxë $\frac{1}{8}$ kg sheqer. Sa paketime të tilla me sheqer mund të bëhen nga sasia prej $31\frac{1}{4}$ kg sheqer?

6. Sa bukë mund të bëhen nga 180 kg miell nëse për 1 bukë duhen $\frac{3}{4}$ kg miell?

Mbledhja dhe zbritja e numrave dhjetorë me numër të ndryshëm dhjetorësh

Deri më tani keni mësuar të mbledhni dhe zbritni numra dhjetorë me numër të njëjtë dhjetorësh (decimalesh). Keni radhitur numrat njëri nën tjetrin sipas presjes dhjetore dhe keni njehsuar me to njëllëj si me numra natyrorë.

Por, çka nëse numrat dhjetorë kanë numër të ndryshëm dhjetorësh? Për shembull, si do të njehsonit $12,5 + 3,27$? A mundeni t'i mbledhni apo fillimisht duhet të bëni diçka me to? Në këtë njësi do të mësoni si të barazoni numrin e dhjetoreve duke shtuar zero për të siguruar përcaktimin korrekt të shumës ose ndryshimit të numrave dhjetorë.



Shembulli 1

Lana kursen para për të blerë një libër. Javën e parë kurseu 3,25 €, kurse javën e dytë 4,50 €.

- Sa para ka kursyer gjithsej për dy javë?
- Më pas, Lana vendosi të blejë një set për vizatim që kushton 5,75€. Sa para i kanë mbetur pas blerjeve?

Zgjidhje:

$$a) 3,25 + 4,50 = 3\frac{25}{100} + 4\frac{50}{100} = (3 + 4) + \left(\frac{25}{100} + \frac{50}{100}\right) = 7 + \frac{75}{100} = 7,75.$$

A mund të njehsoni në një tjetër mënyrë?

Lana ka kursyer gjithsej 7,75 €.

- Më tej, Lana vendosi të blejë vegla për vizatim që kushtojnë 5,75€.

$$7,75 - 5,75 = 7\frac{75}{100} - 5\frac{75}{100} = (7 - 5) + \left(\frac{75}{100} - \frac{75}{100}\right) = 2 + 0 = 2,00$$

Lanës i kanë mbetur 2,00€.

Shembulli 2

Një sipërmarrje bujqësore ka 176,32 hm² ara, 7,3 hm² livadhe, 26,362 hm² vreshta dhe 19 hm² frutore. Sa është syprina e përgjithshme që ka kjo sipërmarrje bujqësore?

Zgjidhje:

Që të njehsoni syprinën e përgjithshme, duhet të mbledhni të gjitha syprinat.

$$\begin{aligned} \text{Mënyra e I: } 176,32 + 7,3 + 26,362 + 19 &= 176\frac{32}{100} + 7\frac{3}{10} + 26\frac{362}{1000} + 19 = \\ &= (176 + 7 + 26 + 19) + \left(\frac{32}{100} + \frac{3}{10} + \frac{362}{1000}\right) = \end{aligned}$$

Në kllapën e dytë mbledhim thyesat me emërues të ndryshëm, SHVP (10, 100, 1000) = 1000

$$= 228 + \left(\frac{32 \cdot 10}{100 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 100}{10 \cdot 100} + \frac{362}{1000} \right) = 228 + \left(\frac{320}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{362}{1000} \right) =$$

$$= 228 + \frac{982}{1000} = 228 \frac{982}{1000} = 228,982$$

Pra, sipërmarrja bujqësore ka 228,982 hm².

Mënyra e II: Ashtu si edhe te numrat natyrorë, edhe këtu gjatë shkrimit duhet të bëjmë kujdes në pozicionin e shifrave në numrat e dhënë. Të qindtat të shkruhen nën të qindtat, të dhjetat nën të dhjetat, njëshet nën njëshet, dhjetat nën dhjetat e kështu me radhë.

Në mënyrën e dytë do ta përdorim vetinë e parë të numrave dhjetorë që të mos bëhet ndonjë gabim gjatë shkrimit të numrave dhjetorë vertikalisht, njëri nën tjetrit. Më pas i mbledh si numrat natyrorë. Bëni kujdes që ta shkruani presjen dhjetore kur të mbaroni me mbledhjen e pjesës dhjetore të numrave dhjetorë.

$$\begin{array}{r} 176,320 \\ 7,300 \\ 26,362 \\ 19,000 \\ \hline 228,982 \end{array}$$

Shembulli 3

Njehsoni ndryshimin e numrave dhjetorë 27,63 dhe 3,796.

Zgjidhje:

Mënyra I:

$$27,63 - 3,796 = 27 \frac{63}{100} - 3 \frac{796}{1000} = (27 - 3) + \left(\frac{63}{100} - \frac{796}{1000} \right)$$

$$= 24 + \left(\frac{63 \cdot 10}{100 \cdot 10} - \frac{796}{1000} \right) = 24 + \left(\frac{630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = \boxed{796 > 630}$$

Pse thyesa që luan rolin e të zbritshmit ka numërues 1630?

$$= 23 + \left(\frac{1630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = 23 + \frac{834}{1000} = 23 \frac{834}{1000} = 23,834$$

Mënyra II: Zbritni si numra natyrorë. Bëni kujdes me presjen dhjetore.

Shembulli 4

Ana shkoi në shitore dhe bleu: 1 l lëng për 82,5 denarë, 300 g biskota çokollate për 135 denarë dhe 250 g djathë për 97,75 denarë. Ana me vete kishte 500 denarë.

a) Sa denarë gjithsej harxhoi Ana? b) Sa denarë i ngelën pas blerjes?

Më pas, vendosi të blente një fletore shënimesh që kushton 185,5 denarë.

c) A thua do t'i ngelin më shumë se 50 denarë pas kësaj blerjeje?

Zgjidhje:

- a) Shuma e përgjithshme e produkteve të blera është:

$$82,5 + 135 + 97,75 = 82,50 + 135,00 + 97,75 \\ = 217,50 + 97,75 = 315,25.$$

Ana harxhoi 315,25 denarë gjatë blerjes së parë.

- b) Para që i ngelën janë
- $500 - 315,25 = 500,00 - 315,25 = 184,75$
- .

Anës i ngelën edhe 184,75 denarë.

- c) Fletorja e shënimeve kushtonte
- $185,50 > 184,75$
- . Pra, Ana nuk kishte para për të blerë fletoren e shënimeve. Jo, Anës nuk do t'i ngelin më shumë se 50 denarë sepse ajo nuk ka mjaftueshëm para as për të blerë fletoren për shënime.

Mund të mbledhësh edhe horizontalisht. Gjatë mbledhjes bëni kujdes në vendndodhjen e shifrave të numrave që i mbledhni.

Detyra 1

Cili numër është për 723,864 më i madh se shuma e numrave 27,8 dhe 1364,03?

Detyra 2

Për sa është më e madhe shuma e numrave 37,9 dhe 3,79 nga ndryshimi i tyre?

Detyra 3

Abduramani ka kursyer para për udhëtimin e tij. Ai blen një biletë për autobus me vlerë 175,50 denarë, një suvenir prej 120,75 denarësh dhe paguan mëngjesin 75,20 denarë.

- a) Sa para ka harxhuar Abduramani për këto më sipër?
- b) Ai kishte me vete 600 denarë. Sa denarë i mbetën pas gjithçka që bleu?
- c) Më pas, Abduramani vendosi të blejë edhe një libër që kapte vlerën 210,60 denarë. A i kanë ngelur atij mjaftueshëm para për blerjen e librit?

Ke 1000 denarë dhe duhet të blesh: libër në vlerën 245,60 denarë, kapele për 385,45 denarë dhe një shujtë ushqimi për 132,75 denarë.

Si do t'i shpërndash paratë dhe a do të mbeten para edhe për diçka tjetër? Shpjego qasjen tënde dhe si do t'i njehsosh harxhimet.

Në fletore zgjidh detyrat në vijim:

1. $6,73 + 0,8$ 2. $16,37 - 7,8$ 3. $13 - (7,8 + 0,95)$

Mbylle punën me një reflektim të shkurtër: Çfarë mësova sot? Çka duhet të përsëris?

Punë e pavarur

1. Njehsoni:

- a) $0,32 + 1,08$ b) $0,064 + 1,32 + 2,4$ c) $12,056 + 0,8 + 3,25$
ç) $357 - 1,02$ d) $1,3 - 0,75$ dh) $2 - 0,375$

2. Njehsoni:

- a) $7,56 - (3,2 + 1,08)$ b) $15 - (14,3 - 7,28)$
ç) $(1,567 - 0,32) + (2,3 - 0,54)$ d) $(5,61 - 1,8) - (0,005 + 1,7)$

3. Diametri i Tokës, që i lidh polet e saj, është 12713, 824 km, kurse diametri në ekuator është më i madh për 42,96 km. Sa është diametri i Tokës në ekuator?

4. Trupi që bën rënie të lirë (nga ndonjë lartësi drejt sipërfaqes së Tokës) në sekondën e parë kalon 4, 905 m, kurse çdo sekondë në vijim nga 9,81 m më shumë. Cakto sa rrugë do të kalojë trupi për a) 2 sekonda, b) 3 sekonda, c) 5 sekonda.

5. Njehsoni në dy mënyra:

- a) $2,75 + \frac{3}{5} + 13,5$ b) $7,2 + \frac{7}{25}$ c) $7,25 + 1\frac{3}{4} + 3,2$
ç) $17,6 - 3\frac{21}{40} - 5,725$ d) $12\frac{3}{5} - 7,32 + 3\frac{3}{4}$

6. Në një depo shkarkimi të materialeve ndërtimore ka 73,56 t çimento. Ditën e parë janë shitur 25,745 t, ditën e dytë 31,63 t, kurse ditën e tretë janë sjellë 17,4 t, por janë shitur 23 t. Cakto sa çimento ka mbetur në depo?

7. Nga një rul pëlhurë me gjatësi 34 m janë prerë pjesë me gjatësi: 3,7 m; 7,25 m; 0,83 m; 5 m dhe 13,72 m. Sa metra pëlhurë kanë mbetur?

8. Një tullë e lagur ka masën 4,5 kg. Pasi të jetë tharë ajo ka humbur masën në vlerë 0,8 kg, kurse pas pjekjes humb edhe 0,6 kg. Sa është masa që ka tulla pas pjekjes?

9. Viktori, Marina dhe Ismeti bashkë kanë masën 184,7 kg. Viktori dhe Marina bashkë kanë 116,5 kg, kurse Marina dhe Ismeti bashkë kanë 114,8 kg. Sa është masa e secilit prej tyre?

10. Paraqitni në mënyrë tabelore bashkësitë:

- $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 0,5 < x < 6,5\}$, $B = \{x | 4,82 < x < 4,91 \text{ dhe } x \text{ ka dy dhjetore}\}$ dhe
 $C = \{x | x < 2,5 < x + 1 \text{ dhe } x \in \mathbb{N}\}$

Shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave dhjetorë

Numrat dhjetorë i përdorni në jetën e përditshme, në veçanti gjatë matjeve, llogaritjeve me para, shpejtësi, pesha dhe shumë raste të tjera. Që të mund të kryeni saktë operacionet matematike me to, duhet të kuptoni se si në mënyrë korrekte shumëzohen dhe pjesëtohen numrat dhjetorë.

Deri më tani jeni njohur me llogaritjet bazike me numra dhjetorë, por sfidë e re do të jetë shumëzimi i numrave dhjetorë që kanë numër të ndryshëm vendesh dhjetorë. Do të mësoni si t'i përshtatni numrat për të lehtësuar dhe bërë më të sakta llogaritjet. Me zotërimin e këtyre operacioneve do të mundeni me sukses t'i zbatoni numrat dhjetorë në situata nga përditshmëria dhe të llogaritni saktë dhe në mënyrë precize.



Shembulli 1

Perimetri i një katrori është 18,8 cm.

- Njehsoni brinjën e tij.
- Njehsoni perimetrin e trekëndëshit barakrahas me krah 5,4 cm, nëse gjatësia e bazës së tij është sa gjatësia e brinjës së katrorit.
- Njehsoni perimetrin e drejtkëndëshit gjatësia e të cilit është sa krah i trekëndëshit, kurse gjerësia sa brinja e katrorit.

Zgjidhje:

- Perimetri i katrorit është $P = 4 \cdot a$. Nëse zëvendësojmë P -në, fitojmë $18,8 = 4 \cdot a$. Që ta njehsojmë brinjën, duhet perimetrin ta ndajmë me 4. Njehso brinjën duke shfrytëzuar dijet paraprake në lidhje me pjesëtimin me numër natyror të numrit me një dhjetorë.
- Perimetri i trekëndëshit barakrahas është $P = 5,4 \cdot 2 + 4,7 = 10,8 + 4,7 = 15,5$ cm.
- Perimetri i drejtkëndëshit është $P = 5,4 \cdot 2 + 4,7 \cdot 2 = 10,8 + 9,4 = 20,2$ cm.

Detyra 1

Numrit 328,4 shtoni të qindtën pjesë të numrit 61267.

Shembulli 2

Zvogëloni produktin e numrave 3,26 dhe 1,8 për numrin 1,3.

Zgjidhje:

Duke përdorur njohuritë për shumëzimin e numrave natyrorë, përkatësisht numrin 3,26 e rritim për 100 herë, kurse numrin 1,8 për 10 herë dhe fitojmë:

$$(3,26 \cdot 100) \cdot (1,8 \cdot 10) = 326 \cdot 18 = 5868.$$

Produkti i fituar 5868 është për 1000 herë më i madh se produkti i numrave 3,26 dhe 1,8. Pse 1000 herë? Prandaj numrin 5868 e zvogëlojmë për 1000 herë, përkatësisht $5868 : 1000 = 5,868$ është produkti i kërkuar i numrave 3,26 dhe 1,8. Sa vende dhjetore ka numri 5,868, d.m.th. produkti i numrave 3,26 dhe 1,8? Mbetet që këtë produkt 5,868 ta zvogëlosh për 1,3, përkatësisht të gjesësh ndryshimin $5,868 - 1,3$.

Dy numra dhjetorë i shumëzojmë me sa vijon: presjen dhjetore të numrave dhjetorë e shpërfillim dhe shumëzojmë numrat e fituar natyrorë, kurse më pas në rezultatin e fituar veçojmë nga e djathta në të majtë aq vende dhjetore sa kanë së bashku numrat e dhënë dhjetorë.

Shembulli 3

Njehso: a) $5,46 : 2,5$ b) $6,4 : 10,24$

Zgjidhje:

a) Që të pjesëtojmë dy numra dhjetorë, shfrytëzojmë dijet paraprake të pjesëtimit të numrit dhjetor me numër natyror. Prandaj, pjesëtimin e numrave dhjetorë do ta kthejmë në pjesëtim të numrit dhjetor me numër natyror.

Për të bërë pjesëtuesin numër natyror, të pjesëtueshmin 5,46 dhe pjesëtuesin 2,5 i shumëzojmë me 10. Presja dhjetore të të dy numrat zhvendoset për një vend në të djathtë dhe detyra kthehet në pjesëtim të numrit dhjetor me numër natyror. Fitohet:

$$5,46 : 2,5 = (5,46 \cdot 10) : (2,5 \cdot 10) = 54,6 : 25$$

$$54,6 : 25 = 2,184$$

$$\begin{array}{r} -50 \\ 46 \\ -25 \\ 210 \\ -200 \\ 100 \\ -100 \\ 0 \end{array}$$

$$8 : 2 = 4$$

$$(8 \cdot 4) : (2 \cdot 4) = 32 : 8 = 4$$

Përpiqu edhe me shembuj të tjerë. Çka mund të përfundosh?

$$b) 6,4 : 10,24 = (6,4 \cdot 100) : (10,24 \cdot 100) = 640 : 1024$$

$$640 : 1024 = 0,625$$

$$6400$$

$$\underline{-6144}$$

$$2560$$

$$\underline{-2048}$$

$$5120$$

$$\underline{-5120}$$

$$0$$

Përsëri shqyrtoni pjesëtimin nën a dhe b. Si pjesëtohen numrat dhjetorë?

Numri dhjetor pjesëtohet me numër dhjetor ashtu që të pjesëtueshmin dhe pjesëtuesin i shumëzojmë me njësi të dhjetëshes me aq zero sa ka vende dhjetore pjesëtuesi, e më pas pjesëtojmë sikur që pjesëtojmë numrin dhjetor me numër natyror (ose numër natyror me numër natyror). Rezultati i pjesëtimit është numër dhjetor (i fundëm ose i pafundëm).

Detyra 2

Sa është çmimi i një metri stof për pantallona nëse për 2,5 m blerësi ka paguar 483,75 denarë?

Shembulli 4

Petra shet ushqim organik, ka 126,4 kilogramë dhe dëshiron t'i paketojë. Ajo planifikon t'i paketojë në paketime me nga 0,25 kg.

a) Sa paketime do të bëjë Petra?

b) Sa do të fitojë ajo, nëse nga një paketim ka fitim prej 1,03 eurosh?

Zgjidhje:

a) Për të llogaritur sa paketime do të bëjë Petra, duhet ta ndajmë masën e përgjithshme prej 126,4 kg me masën e një paketimi, 0,25 kg. Fitojmë $126,4 : 0,25 = (126,4 \cdot 100) : (0,25 \cdot 100) = 12640 : 25$

$$12640 : 25 = 505,6$$

$$\underline{-125}$$

$$140$$

$$\underline{-125}$$

$$150$$

$$\underline{-150}$$

$$0$$

Herësi i fituar 505,6 është numër dhjetor, kështu që për numrin e paketimeve (që në çdo rast është numër natyror) duhet të bëjmë rrumbullakim në pjesën e plotë edhe atë me zvogëlim, pra Petra do të bëjë 505 paketime.

- b) Që të gjejmë sa do të fitojë Petra nga shitja e 505 paketimeve të ushqimit organik, na duhet të shumëzojmë 505 me 1,03, përkatësisht $505 \cdot 1,03 = 520,15$ euro.

Në varësi nga konteksti i problemit, shpesh duhet të rrumbullakojmë numrat dhjetorë deri në numër të plotë (me shtim ose zvogëlim).

Shembulli 5

Në ekskursion shkollor udhëtojnë 144 nxënës. Nëse secili autobus që bart nxënësit ka kapacitet prej 44 personash, atëherë sa autobusë duhet të merren për ekskursion?

Zgjidhje:

$144 : 44 = 3,27$ dhe e rrumbullakojmë në 4 autobusë që të ketë vend për gjithë nxënësit, edhe pse ndonjëri prej autobusëve nuk do të jetë i mbushur plotësisht.

Detyra 3

- a) Petri punon si inxhinier dhe fiton 4,25 euro për një orë. Një ditë pune punoi 6,4 orë. Sa euro atë ditë fitoi ai?
- b) Më pas, ai vendosi paratë e fituara t'i ndan barabar në 4 ditë për harxhime ditore. Sa para do të harxhojë ai në një ditë?

Detyra 4

Rrobaqepësi kishte 6 copa prej një cohe, secila me gjatësi prej 12,56 m. Rrobaqepësi nga coha qep fustane për fëmijë, duke marrë nga 1,57 m për çdo fustan. Sa fustane qepi rrobaqepësi?

Pse, gjatë shumëzimit të numrave dhjetorë rezultati mund të ketë më shumë ose më pak vende dhjetore se sa shumëzuesit? Çka ndodh gjatë pjesëtimit të numrave dhjetorë – si caktojmë ku gjendet presja dhjetore në rezultatin e fituar?

Që të vlerësoni se sa mirë e keni përvetësuar njësinë, përgjigju në fletore në pyetjet në vijim me "Po", "Pjesërisht" ose "Jo":

1. A kuptoj se ku vendoset presja dhjetore gjatë shumëzimit të numrave dhjetorë?
2. A mundem me korrektësi të pjesëtoj numër dhjetor me numër natyror?
3. A di si të pjesëtoj dy numra dhjetorë me numër të njëjtë ose të ndryshëm të vendeve dhjetore?
4. A mund t'i zbatoj këto llogaritje në raste reale?

Nëse në gjitha pyetjet ke dhënë përgjigjet me "Po", atëherë e ke përvetësuar njësinë mësimore për mrekulli!

Nëse ke "Pjesërisht" ose "Jo" si përgjigje, atëherë mendo për atë që të shkakton vështirësi dhe kërko ndihmë ose ushtro akoma.

Punë e pavarur

1. Njehsoni:
a) $0,2 \cdot 0,3$ b) $0,7 \cdot 4,22$ c) $1,01 \cdot 6,9$ ç) $0,072 \cdot 0,8$ d) $2,536 \cdot 1,55$
2. Njehsoni:
a) $6,26 \cdot 10 + 3,2 \cdot 0,5$ b) $0,98 \cdot 40 - 2,7 \cdot 6,16$
3. Nëse një litër vaj për ushqim në shitore ka çmimin 61,5 denarë, sa para duhen për të blerë një kuti me 16 shishe një litërshe?
4. Nga një kilogram bar fitohet 0,23 kg sanë.
a) Sa kilogram sanë do të fitohen prej 23436 kg bar?
b) Sa para do të fitohen nga sana nëse e shesim me çmim prej 20,5 denarësh për kilogram?
5. Njehsoni:
a) $7,5 : 5$ b) $0,3 : 3$ c) $4,5 : 9$ ç) $4 : 0,2$ d) $28 : 0,4$
dh) $12 : 0,006$ e) $10,5 : 0,5$ ë) $146,3 : 41,8$ f) $9,2 : 0,46$ g) $37,37 : 5,05$
gj) $79,2 : 2,88$
6. Udhëtari ka kaluar 28,305 km për 9 orë. Sa rrugë, mesatarisht, ka kaluar ai për një orë?
7. Kopshtari bleu një pompë për ujitje për 7589,34 denarë dhe gjithashtu edhe 41,4 m zorrë. Çfarë çmimi i kishin paguar për metër të zorrës, nëse fatura kap shifrën prej 8932,77 denarë?
8. Nga një gyp për 8 orë shkarkohen 163,2 litra ujë, kurse nga një gyp tjetër shkarkohet kjo sasi për 6 orë. Sa ujë do të shkarkohet nga të dy gypat për 21 orë?

Lidhja mes raportit dhe pjesës nga e tëra

Në përditshmëri shpesh rastisim me krahasimet mes pjesëve dhe të tërës, për shembull, kur përgatitni ndonjë recetë, kur bëni plane për ndërtim ose krahasoni hartën me largësitë e vërteta. Këtë lidhje e tregoni me raport dhe pjesë të tërësisë. Deri më tani keni mësuar për pjesët e tërësisë përmes thyesave, si dhe për përqindjet. Në këtë njësi do të zbuloni se raporti është ngushtë i lidhur me këto koncepte. Do të mësoni si ta përdorni raportin për të llogaritur pjesë të tërësisë së dhënë, por edhe si nga pjesa e dhënë të caktoni tërësinë. Kjo dije do të ndihmojë më mirë të kuptoni proporcionalitetin, të zgjidhni probleme praktike dhe të bëni llogaritje të sakta gjatë situatave të përditshmërisë.

Shembulli 1

Në një mësonjëtorë ka 30 nxënës. Nga to 18 janë vajza, kurse të tjerët janë djem.

- Në çfarë raporti është numri i vajzave dhe numri i djemve?
- Në çfarë raporti është numri i vajzave me numrin e përgjithshëm të nxënësve?
- Në çfarë raporti është numri i djemve me numrin e përgjithshëm të nxënësve?

Zgjidhje:

- Fillimisht gjejmë numrin e djemve: $30 - 18 = 12$. Pra, në mësonjëtorë ka 12 djem. Raporti i numrit të vajzave dhe djemve është: $18 : 12$. E thjeshtojmë me pjesëtim të dy numrave me 6, përkatësisht $(18 : 6) : (12 : 6) = 3 : 2$. Pra, raporti vajza – djem është $3 : 2$. Thjeshtimi i raportit është i ngjashëm me thjeshtimin e thyesave, deri në një formë të pathjeshtueshme.
- Raporti i vajzave në lidhje me numrin e përgjithshëm të nxënësve është: $18 : 30$. E thjeshtojmë raportin duke pjesëtuar të dy numrat me 6, $18 : 30 = 3 : 5$. Pra, raporti i numrit të vajzave ndaj numrit të përgjithshëm të nxënësve është $3 : 5$.
- Raporti i djemve në lidhje me numrin e përgjithshëm të nxënësve është: $12 : 30$. E thjeshtojmë raportin duke pjesëtuar të dy numrat me 6, $12 : 30 = 2 : 5$. Pra, raporti i numrit të djemve ndaj numrit të përgjithshëm të nxënësve është $2 : 5$.



Detyra 1

Në një kuti ka 9 toptha të kuq dhe 6 toptha të kaltër.

- Caktoni raportin e topthave të kuq ndaj topthave të kaltër.
- Caktoni raportin e topthave të kuq ndaj numrit të përgjithshëm të topthave.
- Caktoni raportin e topthave të kaltër ndaj numrit të përgjithshëm të topthave,

Shembulli 2

Ana bën biskota me miell integral. Ajo ka enë me 24 biskota dhe dëshiron ta ndajë ashtu që $\frac{1}{3}$ e biskotave do t'ia jep vëllait të saj, kurse pjesën tjetër do ta mbajë për vete.

- Sa biskota do t'i takojnë vëllait të Anës?
- Në çfarë raporti janë numri i biskotave që merr vëllai me numrin e përgjithshëm të biskotave?
- Në çfarë raporti janë numri i biskotave që mban Ana me numrin e përgjithshëm të biskotave?
- Në çfarë raporti janë numri i biskotave të vëllait me numrin e biskotave të Anës? Cila është lidhja me thyesat $\frac{1}{3}$ dhe $\frac{2}{3}$?

Zgjidhje:

- Vëllai i Anës merr $\frac{1}{3}$ e 24 biskotave. Tani dimë se në vend të fjalës "e" vejmë pikën për shumëzim (rikujtojmë njësinë mësimore të shumëzimit të thyesës me numër natyror, përkatësisht përcaktimin e pjesës nga e tëra), përkatësisht $\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{1 \cdot 24}{3} = \frac{24}{3} = 8$. Pra, vëllai merr 8 biskota.
- Numri i biskotave të vëllait ndaj numrit të përgjithshëm të biskotave është në raport $8 : 24$. Dimë se $8 : 24 = (8 : 8) : (24 : 8) = 1 : 3$. Pra, i vëllai merr 1 pjesë nga 3 të tilla.
- Ana mban pjesën e mbetur të biskotave: $24 - 8 = 16$. Raporti i biskotave që mban Ana ndaj numrit të përgjithshëm të biskotave është $16 : 24 = (16 : 8) : (24 : 8) = 2 : 3$. Pra, Ana mban për vete 2 pjesë nga 3 të tilla.
- Raporti i numrit të biskotave të vëllait dhe numrit të biskotave të Anës është $8 : 16 = 1$ (pjesë për vëllain) : 2 (pjesë për Anën). Pra biskotat janë ndarë në gjithsej $1 + 2 = 3$ pjesë. Është e qartë lidhja me thyesat $\frac{1}{3}$ (vëllai merr 1 prej 3 pjesëve) dhe $\frac{2}{3}$ (Ana mban 2 nga gjithsej 3 pjesë në të cilat është bërë ndarja e biskotave).

Detyra 2

Vesna dhe Valbona duan të ndajnë 1800 denarë në raportin $1 : 3$. Njihsoni nga sa para do të fitojë secila prej vajzave.

Shembulli 3

Markoja dhe Milena blenë çokollatë me 30 kube dhe vendosën ta ndajnë në raportin $2 : 3$ (për çdo dy kube që do të marrë Markoja, Milena do të marrë 3).



- a) Sa kube do të fitojë secili?
- b) Në çfarë raporti është numri i kubeve të çokollatës që merr Markoja dhe gjitha kubeve të çokollatës?
- c) Në çfarë raporti është numri i kubeve të çokollatës që merr Milena dhe gjitha kubeve të çokollatës?

Zgjidhje:

- a) Raporti i dhënë është $2 : 3$. Shuma e pjesëve në raport është $2 + 3 = 5$.
Numri i përgjithshëm i kubeve është 30, prandaj një pjesë ka $30 : 5 = 6$ kube çokollatë.
Markoja fiton $2 \cdot 6 = 12$ kube.
Milena fiton $3 \cdot 6 = 18$ kube.
- b) Numri i kubeve që merr Marko është në raport $12 : 30$ me gjitha kubet e çokollatës. Nëse raporti thjeshtohet, fitojmë $2 : 5$.
- c) Numri i kubeve që merr Milena është në raport $18 : 30$ me gjitha kubet e çokollatës. Nëse raporti thjeshtohet, fitojmë $3 : 5$.

Përveç kësaj, caktoni të satën pjesë të të gjitha kubeve të çokollatës e merr Markoja, e të satën pjesë e merr Milena.

Nëse merr 40 flamuj të vegjël dhe duhet t'i ndash mes teje dhe një shoku në raportin $3 : 5$, atëherë si do të njehsosh sa flamuj do të fitojë secili prej jush? A mund të shpjegosh pse kjo ndarje është e drejtë sipas raportit të dhënë?

Me mbarimin e njësishë mësimore mund të vlerësosh veten sipas kriterëve në vijim:

1. A mund të dalloj raporte të ndryshme në shembujt e dhënë?
(1 – nuk mundem, 3 – mundem me ndihmë, 5 – mundem i pavarur)
2. A mund ta ndaj tërësinë sipas raportit të dhënë dhe të njehsoj numrin e pjesëve?
(1 – nuk mundem, 3 – mundem me ndihmë, 5 – mundem i pavarur)
3. A mund të zbatoj shkathtësitë e fituara për ndarjen e sasive në probleme të rutinës ditore (p.sh. ndarje e ushqimit, e parave e të ngjashme)?
(1 – nuk mundem, 3 – mundem me ndihmë, 5 – mundem i pavarur)
4. A mund të shpjegoj si raporti ndikon në mënyrën se si e ndajmë tërësinë?
(1 – nuk mundem, 3 – mundem me ndihmë, 5 – mundem i pavarur)

Pas vetë vlerësimit, mund të flasësh për rezultatet tua ne arsimtarin ose shokët e klasës për të përmirësuar të kuptuarit e njësishë mësimore.

Punë e pavarur

1. Në hartë, distanca mes dy qyteteve është treguar si 5 cm. Nëse raporti në hartë është 1 : 200000, atëherë sa është distanca e vërtetë mes qyteteve?
2. Në recetën e biskotave raporti i miellit me sheqerin është 3 : 2. Nëse përdoren 600 g miell, atëherë sa sheqer na duhet?
3. Gjatësia e një automobili maketë dhe e automobilin të vërtetë është në raport 1 : 10. Nëse gjatësia e maketës është 445 cm, atëherë sa është gjatësia e automobilin të vërtetë?
4. Për të përgatitur një lëng, prodhuesi rekomandon përzierjen në raportin 1 : 4 (një gotë shurup me katër gota ujë). Sa shurup duhen për të përgatitur 2 litra lëng?
5. Fotografia me dimensione 15 cm dhe 10 cm duhet të zmadhohet me raport të njëjtë ashtu që gjatësia e saj duhet të bëhet 30 cm. Sa do të jetë gjerësia e fotografisë së zmadhuar?
6. Azra për çdo muaj kursen $\frac{3}{5}$ e rrogës së saj. Nëse rroga e saj është 500 euro, atëherë sa euro kursen ajo për një muaj?
7. Një çokollatë e madhe është ndarë në raportin 2 : 3 dy fëmijëve, Marisë dhe Petrit. Nëse Maria fiton 80 g, atëherë sa është sasia e çokollatës që fiton Petri?
8. Për ta ngjyrosur një mur, ngjyra duhet të përzihet në raport 3 : 5 (ngjyrë me ujë). Nëse përdoren 3 litra ngjyrë, atëherë sa litra ujë na duhen?
9. Një automobil harxhoi $\frac{2}{7}$ e rezervuarit, përkatësisht 14 litra lëndë djegëse, pas kalimit të 140 km. Sa litra lëndë djegëse harxhon automobili për 100 km dhe sa është kapaciteti i plotë i rezervuarit?
10. Në zgjedhjet për anëtarë të shoqatës së nxënësve dy kandidatë fituan vota në raportin 5 : 8. Nëse numri i përgjithshëm i votave është 13000, atëherë sa vota ka fituar secili prej tyre?
11. Ana dhe Bojani ngasin biçikletën në shtigje të ndryshme, por fillojnë në të njëjtën kohë. Ana dhe Bojani lëvizin me raport konstant të shpejtësive 3 : 4, përkatësisht Bojani është më i shpejtë. Nëse Ana kalon 18 km për një kohë të caktuar, sa kilometra kalon Bojani në të njëjtën kohë?

Zbatimi i përpjesëtimit të drejtë në situata reale

Në përditshmëri shpesh rastisim në situata ku një madhësi ndryshon në raport të njëjtë me një tjetër. Për shembull, sa më shumë fruta të blejmë, aq më shumë do të duhet të paguajmë ose sa më shumë që udhëtojmë me shpejtësi të njëjtë, aq më shumë distancë do të kalojmë. Këto shembuj mbështeten në konceptin matematik të përpjesëtimit të drejtë.



Në këtë njësi mësimi do të mësoni si të dalloni lidhjen që shprehet me përpjesëtim të drejtë dhe si ta zbatoni në situata reale. Të kuptuarit e këtij koncepti do t'u ndihmojë gjatë zgjidhjes së problemeve të ndryshme nga përditshmëria, sikur që janë llogaritja e harxhimeve, orarit të punës, shpejtësisë, dendësisë e shumë shembuj tjerë praktik.

Shembulli 1

Një oborr me gjatësi 50 metra duhet të ndahet në dy pjesë në raport 4 : 1 për mbjelljen e luleve dhe kullosës. Sa është gjatësia e secilës pjesë?

Zgjidhje:

Raporti 4 : 1 nënkupton se numri i përgjithshëm i pjesëve është $4 + 1 = 5$. Gjatësia e oborrit (50 metra) duhet të ndahet në 5 pjesë me gjatësi të barabarta.

Njëra pjesë është $50 : 5 = 10$ metra.

Pjesa për lulishte (4 pjesë) është $4 \cdot 10 = 40$ m, kurse pjesa për kullosë (1 pjesë) është $1 \cdot 10 = 10$ m.

Pra, pjesa e lulishtes do të jetë 40 metra, kurse pjesa e kullosës do të jetë 10 metra. Shkruani raportin e gjatësive të fituara të lulishtes dhe kullosës, e më pas thjeshtoni të njëjtin. Çfarë vëreni?

Detyra 1

Jakupi bleu një buqetë me 49 lule, me përbërje $\frac{3}{7}$ trëndafila dhe $\frac{2}{7}$ karafila.

- Sa trëndafila, përkatësisht karafila ka buqeta??
- Në çfarë raporti është numri i trëndafilave dhe numri i gjitha luleve?
- Në çfarë raporti është numri i karafilave dhe numri i gjitha luleve?

Shembulli 2

Sofia lexon një libër me shpejtësi konstante. Për 2 orë ajo lexoi 60 faqe. Sa faqe do të lexojë për 5 orë, nëse vazhdon me tempin e njëjtë?

Zgjidhje:

Kuptohet se për më shumë orë, me tempin e njëjtë, Sofia do të lexojë më shumë faqe të librit. Numri i faqeve të lexuara është në përpjesëtim të drejtë me kohën që Sofia e kalon duke lexuar. Njehsojmësa faqe lexon për 1 orë, $60 : 2 = 30$ faqe në orë. Për 5 orë ajo do të lexojë 5 herë më shumë se sa për 1 h, përkatësisht $30 \cdot 5 = 150$ faqe. Nëse Sofia lexon $1\frac{1}{2}$ h, sa faqe do të lexojë? Në këtë rast do të kemi rritje ose ulje të numrit të faqeve të lexuara?

Përpjesëtimi është lidhja mes dy madhësive ashtu që njëra ndryshon në një raport të caktuar me tjetrën.

Përpjesëtimi i drejtë është përpjesëtimi kur rritja (ose zvogëlimi) i njërës madhësie çon në rritjen (ose zvogëlimin) proporcional të madhësisë tjetër.

Detyra 2

Materiali për perde me gjatësi 8 metra kushton 7192 denarë. Njehsoni sa kushtojnë 15 metra të këtij materiali.

Shembulli 3

35 fëmijë udhëtuan me autobus në ekskursion në një kopsht botanik. Të gjithë paguan çmim të njëjtë për biletën e autobusit. Çmimi i përgjithshëm i paguar për 35 fëmijë ishte 8400 denarë. Të nesërmen 42 fëmijë vendosën të shkojnë në ekskursion. Sa është çmimi i përgjithshëm për 42 fëmijë nëse çmimi i transportit për çdo fëmijë mbetet i njëjtë?

Zgjidhje:

Nëse çmimi i përgjithshëm për 35 fëmijë ishte 8400 denarë, atëherë për një fëmijë del çmimi të jetë $8400 : 35 = 240$ denarë. Çmimi që duhet të paguhet për gjithë 42 fëmijët është $240 \cdot 42 = 10080$ denarë.

Detyra 3

Tre shokë nga Kroacia arritën në Maqedoni për pushime. Ata shkëmbyen një sasi kunash kroate (HRK) për denarë të Maqedonisë (MKD). Të gjithë i shkëmbyen paratë me kursin e njëjtë. Valeria shkëmbeu 600 HRK dhe pranoi 4914 MKD.

- Karlo shkëmbeu 900 HRK. Njehsoni sa denarë pranoi Karlo?
- Lana pranoi 5733 denarë. Njehsoni sa kuna shkëmbeu Lana?

Detyra 4

Jana shpesh përgatit petulla për vaktin e mëngjesit, sipas një recete, për familjen e saj 4 anëtarëshe. Një ditë i erdhën në vizitë gjyshja dhe gjyshi për mëngjes. Shkruani se sa sasi nga secili përbërës do t'i nevojitet që të bëjë petulla për 6 persona.

Për 4 persona:

2 vezë, 600 ml qumësht,

1 lugë e vogël sodë buke,

$\frac{1}{2}$ gotë sheqer dhe 400 g miell.

Imagjinon se planifikoni udhëtim me biçikletë. Nëse e dini që nëse lëvizni me shpejtësi të përhershme mund të kaloni 24 km për 2 orë, atëherë si do ta llogaritnit kohën e nevojshme që të arrini në destinacionin prej 60 km me shpejtësi të njëjtë? A mund të shpjegoni pse ky është rast me përpjesëtim të drejtë?

Në fund të njesisë mendoni për atë se sa e keni kuptuar konceptin e përpjesëtimit të drejtë dhe vlerësoni veten përmes pyetjeve në vijim. Për secilin pohim përzgjidh:

☒ Po | ☐ Pjesërisht | ☒ Jo

1. Mund të dalloj situata nga jeta reale ku kemi përpjesëtim të drejtë.
2. Mund të llogarit vlerën e panjohur në një lidhje me përpjesëtim të drejtë.
3. Mund të shpjegoj me fjalë të mia pse dy madhësi janë në një lidhje me përpjesëtim të drejtë.
4. Jam i aftë të zbatoj përpjesëtimin e drejtë në kontekste të ndryshme (tregti, kohë, udhëtim, gatim e të tjera)

Nëse ke më shumë ☒ – e ke përvetësuar me sukses këtë njësi!

Nëse ke më shumë ☐ – përsërit detyrat dhe kërko ndihmë për pjesët e paqarta.

Nëse ke më shumë ☒ – lexoje rishtas njësinë dhe ushtro shembuj plotësues.

Sfidë: Imagjino një shembull nga përditshmëria ku mund të zbatosh përpjesëtimin e drejtë dhe ndaje me shokët e klasës!

Punë e pavarur

1. Në një shitore 2 kilogramë portokaj bëjnë 180 denarë. Sa bëjnë 5 kg portokaj?
2. Një automobil harxhon 8 l lëndë djegëse në çdo 100 km.
Sa litra do të harxhojë për 250 km?
3. Petri lexon 30 faqe të një libri për 40 minuta. Sa kohë i duhet që të lexojë 75 faqe të librit me tempo të njëjtë leximi?
4. Një shtypshkronjë shtyp 500 libra për 4 ditë. Sa libra do të shtypë ajo për 10 ditë, nëse shpejtësia e shtypjes së librave mbetet e njëjtë?
5. Fabrika prodhon 2400 maska për 8 orë. Sa maska do të prodhojë për 5 orë, nëse gjithë kohën punon me intensitet të njëjtë?
6. Për të lyer 20 m² mur duhen 4 l ngjyrë. Sa litra ngjyrë nevojiten për të lyer 50 m² mur?
7. Në një hotel 3 dhoma kushtojnë 12000 denarë për një natë. Sa kushtojnë 5 dhoma për një natë, nëse çmimi për dhomë mbetet i njëjtë?
8. Receta për pica thotë se që të përgatitësh brumin për 4 pica, duhen 2 gota miell. Sa gota miell do të duhen që të bëhen 10 pica, nëse përdoret raporti i njëjtë?
9. Anita përgatitet të bëjë biskota dhe për këtë i nevojiten sasi të caktuara të përbërësve në varësi nga numri i porcioneve. Për pesë porcione biskota, duhen: 200 g sheqer, 150 g miell dhe 2 vezë. Bëj tabelën për të caktuar sa sheqer, miell dhe vezë do t'i duhen për 3, 7 dhe 12 porcione biskota?

T E M A

2

GJEOMETRIA



Fjala gjeometri rrjedh nga fjalët e greqishtes së vjetër "geo" që do të thotë *tokë* dhe "metria" që do të thotë *matje*. Tekstualisht gjeometria shënon matjen e tokës. Në kohët e kaluara njerëzit e zhvilluan gjeometrinë që të matnin arat, të ndërtonin rrugë, tempuj dhe ndërtesa të ndryshme si dhe që të kuptonin formën e botës që i rrethonte.

Sot gjeometria paraqet një ndër disiplinat më të vjetra dhe njëkohësisht më të rëndësishme të matematikës. Ajo na mundëson të hulumtojmë formën, madhësinë, pozicionin dhe raportet mes figurave të ndryshme gjeometrike, sikurse janë pikat, drejtëzat, këndet, trekëndëshat, rrathët dhe trupat në hapësirë.

"Për gjeometrinë nuk ka rrugë mbretërore"

Rezultatet e mësimi

Pasi të kemi mësuar këtë temë ju duhet të jeni të aftë që:

- t'i përdorni konceptet: vijë rrethore, rreth, hark rrethor, pozicion i ndërsjellë i vijës rrethore dhe pikës, vijës rrethore dhe drejtëzës, dy vijave rrethore, në kontekst të përditshmërisë;
- të zgjidhni probleme nga përditshmëria duke përdorur konceptet për pikën, drejtëzën, gjysmëdrejtëzën dhe segmentin;
- të përdorni matjen e këndeve, njësitë matëse të këndeve, këndin qendror dhe këndet në transversale gjatë zgjidhjes së problemeve në kontekst të përditshmërisë;
- të dalloni, krahasoni dhe përdorni vetitë e formave 2D në situata nga përditshmëria;
- të konstruktoni trekëndësha, vijën rrethore brenda dhe jashtashkruar trekëndëshit nën kushtet e dhëna;
- të përdorni simetrinë boshtore, rotacionin rreth pikës së dhënë dhe translacionin gjatë zgjidhjes së problemeve

Vija rrethore dhe rrethi

Më se e qartë është se në përditshmërinë tonë shpesh rastisim me forma që janë të lidhura me vija rrethore dhe rrathë – rrotat e biçikletës, orët, tavolina, madje edhe trajektorët e lëvizjes së planetëve. Në këtë njësi mësimore do t'i përsëritni dhe thelloni dituritë e juaja për vijën rrethore, rrethin dhe pozicionin e ndërsjellë, reciprok, të tyre me pikat, drejtëzat dhe vijat tjera rrethore dhe do të mësoni se si këto koncepte përdoren për zgjidhjen e problemeve praktike.



Shembulli 1

Në fletore vizatoni sipas udhëzimeve në vijim:

1. Vizatoni vijën rrethore k :

- Shënoni me shkronjën, për shembull, O qendrën e vijës rrethore.
- Lidhni qendrën e vijës rrethore me një pikë të saj. Shkruani si e quajmë distancën mes tyre dhe shënoni atë me një shkronjë.
- Lidhni dy pika të vijës rrethore ashtu që segmenti i fituar të kalojë nëpër qendrën e vijës rrethore. Si e quajmë këtë distancë? Përdorni një shkronjë për ta shënuar atë.

2. Shtoni pika:

- Zgjidhni një pikë brenda në vijën rrethore dhe shënoni me M ($\overline{OM} < r$).
- Zgjidhni një pikë në vetë vijën rrethore dhe shënoni me A ($\overline{OA} = r$).
- Zgjidhni një pikë jashtë vijës rrethore dhe shënoni me P ($\overline{OP} > r$).

3. Vizatoni drejtëzat:

- Vizatoni drejtëzën a që e prek vijën rrethore vetëm në një pikë T ($a \cap k = \{T\}$).
- Vizatoni drejtëzën c që e pret vijën rrethore në pikat A dhe B ($c \cap k = \{A, B\}$).
- Vizatoni drejtëzën m e cila nuk e prek vijën rrethore ($m \cap k = \emptyset$).

4. Vizatoni një tjetër vijë rrethore:

- Vizatoni dhe shënoni vijë rrethore që e prek vijën e parë rrethore.
 - Vizatoni dhe shënoni vijë rrethore që e pret vijën e parë rrethore.
 - Vizatoni dhe shënoni vijën rrethore që nuk ka pika të përbashkëta me vijën e parë rrethore.
- Sa zgjidhje ka?

Shembulli 2

Paraqitni pozicionet e ndryshme të ndërsjella të vijave rrethore dhe drejtëzave me softuer gjeometrik.

Vërejtje: Nëse nuk keni qasje në softuerët gjegjës për vizatim, atëherë në fletoren tuaj vizatoni me anë të qelqes për gjeometri.

Zgjidhje:

- Paraqitni pozicionin e ndërsjellë të dy vijave rrethore që prekin njëra-tjetrën.
- Matni distancën mes qendrave të këtyre dy vijave rrethore me vegël përkatëse nga aplikacioni softuerik dhe krahasoni me shumën e rrezeve të dy vijave rrethore. Çka vëreni?
- Duke e zhvendosur qendrën e njëres nga vijat rrethore, vëreni se si ndryshon distanca mes qendrave të vijave rrethore krahasuar me shumën e rrezeve të tyre.

Udhëzim për punë: Si ta realizoni këtë me ndihmën e softuerit përkatës arsimor?

- Aktivizoni softuerin arsimor dhe përzgjidhni opsionin për vizatim.
- Vizatimi i vijës rrethore:
 - Përzgjidhni veglën për vijën rrethore dhe vendosni qendrën e vijës rrethore duke marrë një pikë nga sipërfaqja për vizatim (përzgjidhni qendrën manualisht nëse vizatoni me setin e veglave gjeometrike).
 - Më pas, në varësi nga përzgjedhja e shiritit të menysë së veglës për vizatim të vijës rrethore, përfundoni procedurën për vizatimin e vijës rrethore. Më mirë do të ishte të përzgjidhni një pikë nga vija rrethore me të cilën do ta caktoni rrezen e saj.
- Zhvendosja e pikës dhe matja e distancës:
 - Krijoni një pikë (për shembull, pikën C) brenda ose jashtë vijës rrethore.
 - Zhvendosni pikën me veglën përkatëse dhe përdorni veglën për matje të distancës për të parë se si ndryshon distanca prej pikës deri te qendra e vijës rrethore. Krahasoni me rrezen e vijës rrethore. Bëni shënime të përgjithshme për gjërat që mësuat.

Shembulli 3

Në vijën rrethore $k(O, r)$ janë përzgjedhur pikat A, B, C dhe D (Viz. 1) Në sa pjesë, pikat A dhe B, e ndajnë vijën rrethore?

Zgjidhje:

Pikat A dhe B, sikurse edhe shihet në vizatim, e ndajnë vijën rrethore në dy pjesë, njëra që e përmban pikën C dhe tjetra që e përmban pikën D.



Viz. 1

Pjesa e vijës rrethore e kufizuar me dy pika të saj, bashkë me ato pika, quhet hark rrethor.

Dy pika të ndryshme të një vije rrethore përcaktojnë dy harqe rrethore.

Që të dallojmë dy harqet rrethore që i përcaktojnë dy pika të ndryshme të një vije rrethore, për shënimin e tyre do të përdorim tri shkronja të mëdha: dy pikat e skajshme të harkut dhe një pikë të vijës rrethore me të cilat ky hark është përcaktuar. Dy harqet në Viz. 1 i shënojmë me $\widehat{ACB}$ dhe $\widehat{ADB}$.

Detyra 1

Janë dhënë dy vija rrethore k_1 (O_1 , 4 cm) dhe k_2 (O_2 , 3 cm). Në çfarë pozicioni të ndërsjellë, reciprok, janë dy vijat e dhëna rrethore nëse largësia mes qendrave të tyre është.

a) $\overline{O_1O_2} = 7$ cm

b) $\overline{O_1O_2} = 5$ cm

c) $\overline{O_1O_2} = 9$ cm

Shpjegoni përgjigjen tuaj.

Detyra 2

Vizatoni vijë rrethore me rreze 35 mm, e më pas nënvizoni një hark rrethor që i përgjigjet tetivës me gjatësi. a) 40 mm, b) 3 cm, c) të barabartë me diametrin e vijës së dhënë rrethore.

Shembulli 4:

Në një park duhet të vendosen dy fontana rrethore. Njëra fontanë me rreze 5 metra, ndërsa tjetra me rreze 7 metra. Në çfarë distance duhet të jenë qendrat e këtyre fontanave që:

a) dy fontanat të jenë jashtë njëra-tjetrës

b) dy fontanat të preken nga jashtë

c) fontana më e vogël të jetë brenda fontanës më të madhe dhe ta prek atë nga brenda

Zgjidhje:

a) Nëse largësinë, distancën, mes qendrave të fontanave e shënojmë me c , atëherë që dy fontanat të jenë jashtë njëra-tjetrës, duhet $c > r_1 + r_2$, përkatësisht distanca mes qendrave të fontanave duhet të jetë më e madhe se shuma e rrezeve të dy fontanave. Vizatoni!

- b) Që dy fontanat të preken, distanca mes qendrave të fontanave duhet të jetë e barabartë sa shuma e rrezeve të fontanave, përkatësisht $c = r_1 + r_2$. Vizatoni!
- c) Që fontana më e vogël të jetë brenda fontanës më të madhe dhe ta prek këtë të fundit nga ana e brendshme, duhet që distanca mes qendrave të fontanave të jetë e njëjtë me ndryshimin e rrezeve të fontanave, përkatësisht $c = r_2 - r_1$, ku $r_1 < r_2$ (Viz. 2).



Detyra 3

Rrota e biçikletës ka rreze 35 cm.

- Vizatoni vijën rrethore e cila e paraqet rrotën e biçikletës dhe në të shënoni qendrën e vijës rrethore. Në fletore rrezja le të jetë 3,5 cm. (rikujtohuni për raportin)
- Matni gjatësinë e diametrit të biçikletës. Sa është madhësia e vërtetë?
- Vizatoni rrezen e rrotës së biçikletës dhe shënoni atë me një shkronjë.
- Në çfarë pozicioni të ndërsjellë janë kufiri i jashtëm dhe i brendshëm i gomës?

Në një qytet dy emetues radio-televiziv janë vendosur në distancë të caktuar nga njëri-tjetri. Emetuesi i parë ka sipërfaqe të antenës që krijon sinjal me rreze prej 3 kilometrash, ndërsa emetuesi i dytë krijon sinjal me rreze prej 4 kilometrash. Të dy emetuesit janë vendosur në largësi 5 kilometra njëri nga tjetri.

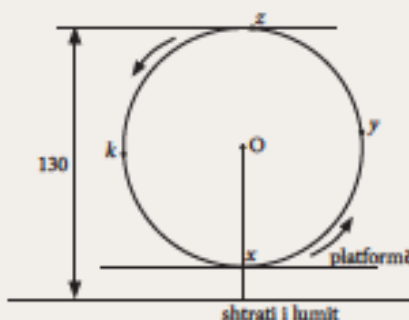
- Caktoni a ka mbimbullim të rajoneve të sinjaleve, përkatësisht të sinjaleve të dy emetuesve?
- Për pranim më të mirë, nuk duhet të kishte mbimbullim dhe përzjerje të sinjaleve të dy emetuesve. Në cilën distancë mund të vendosen emetuesit ashtu që të kemi pranim sinjali pa përzjerjen e tyre?

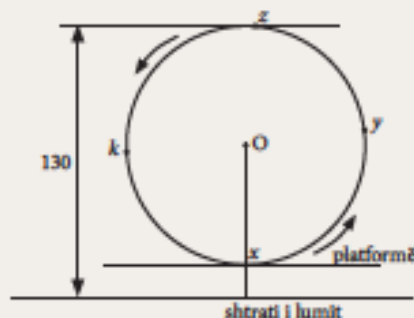
Në fletore jepni përgjigjet. Për pohimet që kanë përgjigjen PO – jepni shembull, ndërsa për pohimet për të cilët përgjigja është JO – kthehuni në shembujt dhe detyrat që kanë të bëjnë me këto pohime.

- Mund të identifikoj pikën që është pikë të brendshme të vijës rrethore, pikë të jashtme të vijës rrethore ose pikë të vijës rrethore. PO/JO
- Mund të përcaktoj nëse drejtëza e prek ose e pret vijën rrethore. PO/JO
- Mund të përcaktoj pozicionin e ndërsjellë të dy vijave rrethore. PO/JO
- Mund të shpjegoj se çka është harku rrethor. PO/JO
- Mund të shënoj hark rrethor të vijës së dhënë dhënë rrethore. PO/JO

Punë e pavarur

- Vizatoni vijën rrethore $k(O, r)$. Vizatoni dhe shënoni rrezen e kësaj vije rrethore me $\overline{OA}$ dhe diametrin me $\overline{AB}$. Cilat pohime janë të sakta?
 - Rrezja është sa gjysma e diametrit.
 - Diametri është më i madh se rrezja.
 - Diametri është sa rrezja.
 - Rrezja është dy herë më e madhe se diametri.
- Vizatoni $k(O, 6 \text{ cm})$. Vizatoni kordën $\overline{BC}$ me gjatësi 8 cm. Mat dhe përgjigju sa është distanca nga qendra e vijës rrethore deri te korda?
 - Distanca është 4 cm.
 - Distanca është 6 cm.
 - Distanca është 8 cm.
 - Distanca është 4,5 cm.
- Pika A gjendet në largësi 6 cm nga qendra O e vijës rrethore me rreze 5 cm. Cili nga pohimet në vijim është i saktë në lidhje me pozicionin e pikës A?
 - Pika A gjendet në vijën rrethore.
 - Pika A gjendet brenda vijës rrethore.
 - Pika A gjendet jashtë vijës rrethore.
 - Pika A shtrihet në diametrin e vijës rrethore.
- Dy vija rrethore kanë qendra në pikat O dhe P. Vija e parë rrethore ka rreze 5 cm, ndërsa e dyta ka rreze 7 cm. Si do të jetë pozicioni i ndërsjellë i këtyre dy vijave rrethore nëse distanca mes qendrave të tyre është 12 cm?
 - Vijat rrethore do të preken nga jashtë.
 - Vijat rrethore do të priten.
 - Vijat rrethore janë njëra brenda tjetrës.
 - Vijat rrethore do të preken nga brenda.
- Dy rrota motori kanë rreze të ndryshme dhe distancë 50 cm ndërmjet qendrave. Rrezja e njërit rrotë është 15 cm, ndërsa e rrotës tjetër është 25 cm.
 - Vizatoni vijën rrethore për të dy rrotat, përkatësisht. (përdor raportin)
 - Në çfarë pozicioni të ndërsjellë janë vijat rrethore? Shpjegoni pse.
- Vizatoni $k(O, 4 \text{ cm})$, e më pas vizato rrezen $\overline{OM}$, kordën $\overline{MN}$ dhe shënoni harkun më të madh rrethor që i përgjigjet kësaj korde. Në fund, tërhiqni një diametër pikat e skajshme të të cilit janë dy pika nga harku rrethor i theksuar.
- Vizatoni dy drejtëza paralele dhe një vijë rrethore që i prek dy drejtëzat. Sa do të jetë rrezja e kësaj vije rrethore? Cila është lidhja mes rrezes së vijës rrethore dhe distancës mes dy drejtëzave?
- Mbi banakun me formë drejtkëndore me dimensione 2 dm dhe 2 m, në një restorant, duhet të radhiten enë me forma rrethore diametrat e të cilave janë 5 dm, 1 dm, 1.5 dm, 2 dm. Sa është numri më i madh i mundshëm i enëve që mund të radhiten përgjatë gjatësisë së banakut, nëse duhet të vendosen të paktën nga një enë e secilës prej madhësive të dhëna?

9. Markoja dhe Ana janë në park dhe që të dy kanë rrethin e vet për të luajtur. Rrethi i Markos ka rreze 5 metra, ndërsa ai i Anës ka rreze 3 metra. Qendrat e të dy rrethëve janë 6 metra larg njëra-tjetrës.
- a) Rrathët e Markos dhe Anës a priten?
Bëni një vizatim duke përdorur raportin që t'i përgjigjeni pyetjes.
- b) Nëse qendra e rrethit të Anës zhvendoset 2 metra më afër qendrës së rrethit të Markos, atëherë rrathët do të mbimbuloen më shumë ose më pak? Shpjegoni.
10. Në oborrin e Betit ka një ngastër (parcelë) rrethore me lule me rreze 8 metra. Shtegu kalon nëpër oborr dhe është në largësi 6 metra nga ngastra rrethore e luleve. Që t'i ndihmoni Betit me rregullimin e oborrit, përgjigjuni pyetjeve dhe faktori shpjegimin tuaj me vizatim (shfrytëzoni njohuritë e tua paraprake për raportet).
- a) Shtegu a e pret vijën rrethore të ngastrës? Nëse po, atëherë sa është gjatësia e pjesës së shtegut që kalon nëpër ngastër?
- b) Shtegu a thua e pret vijën rrethore të ngastrës së luleve, nëse zhvendoset 2 metra më larg nga qendra e ngastrës? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
- c) Shtegu a thua e pret vijën rrethore të ngastrës së luleve nëse e zhvendosim 2 metra më afër qendrës së ngastrës? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
11. Vizatoni vijën rrethore $k(O, 3\text{cm})$, e më pas vizatoni rrezen $\overline{OM}$, diametrin $\overline{MN}$, kordën $\overline{AB}$ dhe harkun $\widehat{ACB}$.
12. Në qendrën e parkut të qytetit ngritet një rrotë spektakolare e cila ofron pamje të mrekullueshme përreth (shihni vizatimin).
- Diametri i rrotës është 120 m.
 - Pika më e lartë në rrotë është 130 m mbi nivelin e parkut.
 - Rrota rrotullohet në kahen e lëvizjes së akrepave të orës.
- a) Pika O në vizatim paraqet qendrën e rrotës. Në cilën lartësi (me metra) mbi nivelin e parkut gjendet pika O?
- b) Rrota lëviz, rrotullohet, me shpejtësi konstante dhe për të bërë një rreth të plotë i nevojiten 50 minuta. Mila është ngjitur në kabinën në pozicionin fillestar X dhe fillon xhiron. Ku do të jetë Mila pas 25 minutave?
A. Në pikën Y B. Mes pikave Y dhe Z C. Në pikën Z Ç. Mes pikave Z dhe X
- b) Sa është gjatësia e rrugës që kalon kabina e Milës për 25 minuta, nëse perimetri i vijës rrethore që paraqet rrotën është 377 m? Si quhet pjesa e vijës rrethore që përshkon Mila?
- 



Tangjenta e vijës rrethore

Tangjenta është një nga konceptet me më shumë interes në gjeometri. E hasim në arkitekturë, transport dhe teknologji. Në këtë njësi mësimore do të mësoni çka është tangjenta e vijës rrethore, si ta dalloni atë, si ta vizatoni në mënyrë korrekte dhe do të mësoni se si tangjenta mund të përdoret në zgjidhjen e detyrave në kontekstin real.



Shembulli 1

Në figurën djathtas është paraqitur një urë e cila shtrihet mbi lum. Konstruksioni i saj kryesor bartës ka formën e harkut rrethor. Mbi këtë hark është platforma e drejtë nëpër të cilën, kuptohet, mund të lëvizin automjete ose këmbësorë.



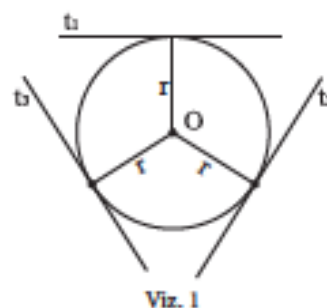
- Në çfarë pozicioni të ndërsjellë janë harku rrethor i urës dhe platforma e sheshtë që qëndron mbi hark nga ana e sipërme?
- Imagjinoni se konstruksioni bartës është pjesë e një rrethi të plotë. A mund të gjeni ngjashmëri me ndonjë nga pozicionet e ndërsjella të vijës rrethore me drejtëzën që keni mësuar në orët e matematikës?

Tangjenta e vijës rrethore është drejtëza e cila ka një pikë të përbashkët me vijën rrethore, që e quajmë pikë e takimit.

Shembulli 2

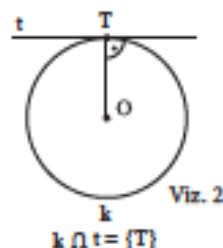
Vizatoni në fletoren tuaj një vijë rrethore me rreze arbitrare dhe qendër O . Më pas vizatoni, të paktën, dy drejtëza të ndryshme në largësi, nga qendra e vijës rrethore, sa rrezja e vijës tënde rrethore (Viz. 1)

- Çfarë pozicioni reciprok zë secila drejtëz e vizatuar me vijën rrethore?
- Për secilën tangjentë lidhni pikën e takimit me vijën rrethore dhe qendrën e vijës rrethore. Matni këndin që zë secila tangjentë me rrezën duke lidhur pikën e takimit me qendrën e vijës rrethore. Çka mund të përfundoni nga hulumtimi juaj?



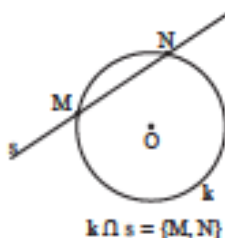
Vizatoni vijën rrethore $k(O, r)$ dhe rrezen $\overline{OT}$ ku T është pikë arbitrare e vijës rrethore. Vizatoni një tangjentë në vijën rrethore që kalon nëpër pikën T .

Tangjenta e vijës rrethore është normale me rrezen e vijës rrethore që lidh qendrën e vijës rrethore me pikën takuese (pikën e tangjentës).



Shembulli 3

Në vijën rrethore $k(O, r)$ përzgjidhni dy pika M dhe N nëpër të cilat kalon sekanta përkatëse.



Drejtëza që e pret vijën rrethore në dy pika quhet sekantë

Detyra 1

Në një qytet planifikohet ndërtimi i një sheshi të ri. Në këtë shesh do të ketë një fontanë të madhe në formë të vijës rrethore. Rrezja e fontanës është 8 metra. Planifikohet të shtrohet një shteg që do të jetë tangjentë e vijës rrethore të fontanës.

- Në cilën largësi është shtegu nga qendra e fontanës?
- Bëni një vizatim. Si do ta vizatoni shtegun? Gjatë vizatimit përdorni raportin.

Shembulli 4

Në një park ka ngastër të madhe me lule në formë rrethore. Duhet të vendoset një gur dekorues në një pikë P e cila është jashtë vijës rrethore të ngastrës së luleve. Më tej, planifikohet të shtrohet një shteg që do të kalojë nëpër gurin dekorues dhe do ta prek ngastrën e luleve në një pikë. Si duhet të vizatohet shtegu që do të kalojë nëpër pikën P (guri dekorues) dhe të jetë tangjentë e ngastrës? Cila është metoda e saktë e vizatimit të këtij shtegu, duke shfrytëzuar vetëm trekëndësh dhe vizore?

Zgjidhje:

- Fillimisht, vizatoni ngastrën e luleve (vijën rrethore) me qendër në pikën O dhe rreze r .
- Shënoni pikën P (gurin dekorues) jashtë vijës rrethore.
- Me trekëndësh dhe vizore vizatoni tangjentën që kalon nëpër pikën P dhe e prek vijën rrethore në pikën T . Sa shtigje të tilla mund të vendosen? Si do të vërtetoni nëse është vizatuar me saktësi shtegu që kalon nëpër gurin dekorues dhe e prek fontanën?

Nga pika e dhënë jashtë vijës rrethore mund të konstruktohen saktësisht dy tangjenta të vijës rrethore.

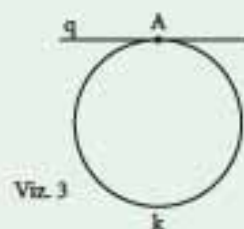
Në këtë njësi mësimore pritet që vizatimin ta realizoni me vizore.

Shembulli 5

Shtegu për automjete është projektuar si vijë rrethore me rreze 50 m. Gardhi mbrojtës për këtë shteg duhet të jetë drejtëz që e prek shtegun në një pikë saktësisht të paracaktuar. Paraqitni shtegun dhe gardhin mbrojtës me anë të vizatimit.

Zgjidhje:

Me vizatim është paraqitur vija rrethore (shtegu rrethor) dhe gardhi mbrojtës që e prek shtegun në pikën A.



Detyra 2

Gjatë ndërtimit të poligonit për skejtboard me formë rrethore me rreze 10 m, në distancë 25 m nga qendra e kësaj vije rrethore është vënë një shenjë rrugërrëfyes. Nga rrugërrëfyesja deri te poligoni i skejtboardit janë planifikuar dy shtigje që do ta prekin vijën rrethore të poligonit të skejtboardit. Sa janë gjatësitë e këtyre shtigjeve? Udhëzim: Përdorni raport përkatës, paraqitni situatën me vizatim, ndërsa më pas me matje caktoni gjatësinë e këtyre shtigjeve.

- 1) Cili është dallimi gjatë vizatimit të tangjentës në vijën rrethore kur duhet ta tërhiqni:
 - a) nëpër një pikë të vijës rrethore.
 - b) nëpër një pikë jashtë vijës rrethore.Paraqitni dy rastet me vizatime.
- 2) Sa është distanca nga qendra e vijës rrethore deri te pika/t e përbashkët/a me tangjentën (sekantën) krahasuar me rrezen e kësaj vije rrethore?

Përgjigjuni pyetjeve në fletore.

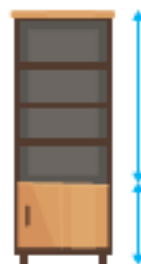
- A mund të dalloj tangjentën në vijën rrethore? PO/JO
 - A mund të vizatoj tangjentë në një pikë të dhënë? PO/JO
 - A mund të zbatoj konceptin e tangjentës në situata praktike? PO/JO
- Shpjego përgjigjen tënde.

Punë e pavarur

- Në një park me formë rrethi me rreze 30 metra planifikohet të vendosen llamba në largësi 5 metra nga kufiri (vija rrethore) i parkut. Cila nga gjatësitë në vijim paraqet rrezen e vijës rrethore që ndërtojnë llambat?
 - 25 metra
 - 35 metra
 - 30 metra
 - 20 metra
- Në shtegun rrethor për biçikleta me diametër 30 metra duhet të ndërtohet një dalje që do të jetë pika takuese me një shteg tjetër të drejtë. Sa është largësia nga qendra e vijës rrethore deri te dalja?
 - 0 metra
 - 15 metra
 - 30 metra
 - 20 metra
 - Cila veti e tangjentes do të ndihmojë për dizajnimin e shtegut nga dalja e shtegut?
 - Nëse gjatësia e rrezes së shtegut të biçikletave është zmadhuar në 20 metra, atëherë a thua dalja e shtegut të biçikletave mbetet pika takuese e shtegut që duhet të ndërtohet?
- Fontana në një park ka formën e vijës rrethore me rreze 12 metra. Duke filluar nga pika A e cila është në largësi 15 metra nga qendra e vijës rrethore, duhet të shtrohet një shteg që do të jetë tangjentë e saj.
 - Cila nga gjatësitë e mëposhtme është sa distanca nga qendra e vijës rrethore deri te pika takuese e tangjentes dhe vijës rrethore?
 - 10 metra
 - 12 metra
 - 15 metra
 - 20 metra
 - Cila nga gjatësitë e mëposhtme është sa distanca nga pika A deri te pika takuese e tangjentes dhe vijës rrethore? Shfrytëzoni vizatim me raport.
 - 5 metra
 - 8 metra
 - 9 metra
 - 10 metra

Mbledhja dhe zbritja grafike e segmenteve

Mbledhja dhe zbritja e segmenteve është pjesë bazike e gjeometrisë që përdoret në shumë situata praktike. Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si t'i mblidhni dhe zbrisni segmentet duke shfrytëzuar kompasin. Akoma më shumë, do të mësoni të dalloni pikat kolineare dhe si të konstruktoni segment me gjatësi të njëjtë sa segmenti i dhënë. Kjo teknikë do të mundësojë me precizitet të konstruktoni gjatësitë dhe njohuritë t'i përdorni në raste të ndryshme.



Shembulli 1

Tomisllavi dëshiron të shkojë nga shtëpia e tij deri te shkolla, por në rrugë ka dy stacione ku duhet të ndalojë, edhe atë në: stacionin A dhe stacionin B.

- Distanca nga shtëpia e tij deri te stacioni A është 3 km.
 - Distanca nga stacioni A deri te stacioni B është 2 km.
 - Distanca nga stacioni B deri te shkolla është 4 km.
- a) Vizatoni segmente që e paraqesin rrugën nga shtëpia e tij deri te shkolla, përmes stacioneve A dhe B.
- b) Njehsoni largësinë e përgjithshme (grafikisht dhe artimetikisht) që ai duhet ta kalojë për të arritur në shkollë.
- c) Nëse ai e kaloi rrugën nga shtëpia deri te stacioni A, atëherë edhe sa kilometra rrugë i ngelin deri të arrij në shkollë?

Zgjidhje:

a) Në çfarë raporti janë vizatuar distancat?

b) $3 \text{ km} + 2 \text{ km} + 4 \text{ km} = 9 \text{ km}$. Ai duhet të kalojë 9 km për të arritur deri te shkolla.



3 cm

2 cm

4 cm

c) $9 \text{ km} - 3 \text{ km} = 6 \text{ km}$. Nëse Tomisllavi e ka kaluar rrugën nga shtëpia deri te stacioni A, atij i kanë mbetur edhe 6 km rrugë deri te shkolla.

Shembulli 2

Një inxhinier duhet të vendosë llamba për të ndriçuar një shteg në park. Shtegu është vijë e drejtë, ndërsa inxhinieri planifikon të vendosë tri llamba në vende të caktuara.

- Llamba A duhet të vendoset në anën e majtë të shtegut.
 - Llamba B duhet të vendoset në mes ndërmjet A dhe C.
 - Llamba C duhet të vendoset në anën e djathtë të shtegut.
- a) Vizatoni një drejtëz që paraqet shtegun dhe shënoni pikat A, B dhe C.
- b) Provoni nëse llambat A, B dhe C janë në drejtëzën e njëjtë.
- c) Nëse distanca prej A deri te B është 5 metra, atëherë njehsoni distancën prej A deri te C.

Zgjidhje:

a)

b) Pikat A, B dhe C janë në drejtëzën e njëjtë.

Për pikat që shtrihen në një drejtëz themi se janë pika kolineare.

- c) Distanca nga pika A deri te pika C (nëse pikat A, B dhe C janë kolineare dhe pika B është ndërmjet pikave A dhe C) është shuma e distancave nga pika A deri te pika B dhe nga pika B deri te pika C: $5\text{ m} + 5\text{ m} = 10\text{ m}$. Distanca nga pika A deri te pika C është 10 metra, përkatësisht $AC = 10\text{ m}$.

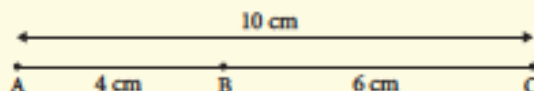
Shembulli 3

Pikat A, B dhe C a janë kolineare, nëse:

- a) $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{AC} = 10\text{ cm}$, $\overline{AB} = 6\text{ cm}$ b) $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{AC} = 12\text{ cm}$, $\overline{AB} = 10\text{ cm}$

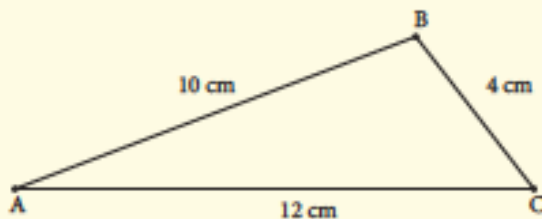
Zgjidhje:

- a) Nëse grafiku i mbledhim segmentet AB dhe BC, do ta fitojmë segmentin AC, respektivisht $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Kjo është paraqitur edhe me vizatim



Pikat A, B dhe C janë kolineare.

- b) Në këtë rast asnjërën prej distancave nuk mund ta paraqitni si shumë të dy distancave tjera, prandaj pikat A, B dhe C nuk janë kolineare $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.



Për tri pika të çfarëdoshme M, N dhe P, vlen: Distanca nga pika M deri te pika P nuk është më e madhe se shuma e distancave nga M deri te N dhe nga N deri te P, përkatësisht $\overline{MP} \leq \overline{MN} + \overline{NP}$.

Shembulli 4

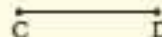
Jana ka dy kopshte në formë të katrorëve me gjatësi të ndryshme të brinjëve. Pas matjeve të gjatësive të brinjëve ajo erdhi në përfundim se:

- Kopshti i parë ka brinjë $\overline{AB} = 5\text{ m}$.
- Kopshti i dytë ka brinjë $\overline{CD} = 3\text{ m}$.

Jana dëshiron të lidh këto dy gjatësi në një të vetme, por gjithashtu dëshiron të dijë sa është më e gjatë brinja AB nga brinja CD.

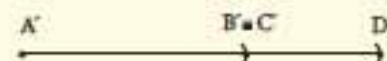
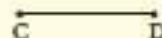
Zgjidhje:

a) Me vizore vizatojmë segmentet $\overline{AB} = 5$ m dhe $\overline{CD} = 3$ m.



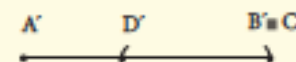
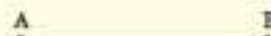
b) Për të konstruktuar segmentin që do të paraqet shumën e segmenteve $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$, punoni si jana:

- Me kompas matni gjatësinë e segmentit $\overline{AB}$.
- Bartni këtë gjatësi në gjysmëdrejtëzën që do ta vizatoni, duke e shënuar si $A'B'$ (ku pika A' vendoset si pikë fillestare e gjysmëdrejtëzës).
- Me kompas matni gjatësinë e $\overline{CD}$.
- Këtë gjatësi e bartni me fillim në pikën B' (gjilpëra e kompasit vendoset në B' , fitohet $B' \equiv C'$. Më pas, me pjesën tjetër të kompasit – lapsin e tij, vizatojmë një hark rrethor që e pret gjysmëdrejtëzën dhe pikën prerëse e shënojmë me D').
- Segmenti i ri $A'D'$ do të ketë gjatësi të njëjtë sa shuma e gjatësive të segmenteve $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$, $A'D' = AB + CD$.



c) Për të konstruktuar segment me gjatësi sa ndryshimi i gjatësive të segmenteve $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$, Jana veproi me sa vijon. Edhe ju ndiqni këto hapa:

- Vizatoni një gjysmëdrejtëz dhe përzgjidhni një pikë fillestare A' .
- Me kompas matni gjatësinë e segmentit $\overline{AB}$.
- Këtë gjatësi e bartni në gjysmëdrejtëz, duke e shënuar me $A'B'$.
- Me kompas matni gjatësinë e segmentit $\overline{CD}$.
- Gjilpërën e kompasit vendosni në pikën B' dhe vizatoni një hark rrethor në segmentin $A'B'$, por me lapsin e kompasit kah pika A' ($B' \equiv C'$).
- Pikën ku harku e pret segmentin $A'B'$ e shënojmë me D' .
- Segmenti i ri $A'D'$ do të ketë gjatësi të njëjtë si ndryshimi i gjatësive të segmenteve $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$, përkatësisht $A'D' = AB - CD$.



Detyra 1

Jepet një drejtkëndësh me gjatësi brinjësh 2 cm dhe 3 cm, përkatësisht. Grafikisht llogarit perimetrin e drejtkëndëshit.

Detyra 2

Ana planifikon të blejë dy pjesë mobilesh për dhomën e saj të ditës:

- Një ulëse treshe me gjatësi $\overline{AB} = 2$ m.
- Një kanape me gjatësi $\overline{CD} = 1,5$ m.

a) Vizatoni, në raport, segmentet $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$ që do të paraqesin gjatësitë e mobileve.

- b) Konstruktoni një segment të ri gjatësia e të cilit është gjatësia e përgjithshme e mobileve (ulëses treshe dhe kanapesë).
- c) Nëse gjatësia e murit në dhomën e ndenjes është 5 m, njehsoni a do të mbetet hapësirë në mur, nëse Ana i vë dy pjesët e blera pranë murit të njëjtë, njëra pranë tjetrës.
- ç) Nëse gjatësia e murit më të gjatë është 5 m, ndërsa Ana në atë anë të dhomës së ndenjes e ka vënë ulësen treshe, sa gjatësi i mbetet për ndonjë orendi tjetër?

Detyra 3

Davidi ka një ngastër me lule në formë drejtkëndore. Gjatësia e njërës anë është $\overline{AB} = 4$ m, ndërsa e anës tjetër është $\overline{CD} = 3$ m.

- a) Vizatoni, në raport, segmentet $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$, që do të paraqesin anët e ngastrës.
- b) Konstruktoni një segment të ri gjatësia e të cilit është sa gjatësia e përgjithshme e segmenteve $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$.
- c) Me konstruktion përcaktoni sa gjithsej metra gardh do t'i duhen Davidit, nëse e rrethon me gardh gjithë ngastrën? (I merr në konsideratë të katër anët).



Si mund të ndikojë matja e saktë dhe caktimi i gjatësive të segmenteve në procesin e dizajnit të mobileve ose paraqitjen e distancave në hartë? Shpjegoni pse është e rëndësishme të përdoren vegla matëse të sakta, sikurse është vizorja dhe kompasi, dhe si mund kjo të përmirësojë rezultatet në situata reale, sikurse është prodhimi i mobileve ose matja e distancave.

Në fletore shkruani përgjigjet. Për çka nuk jeni të sigurt në dituritë e juaja, kthehuni dhe përsëritni ato pjesë të njësisë mësimore.

- A mundem vetë të mbledh dhe zbres segmente me kompasi?
- A e kuptoj dallimin mes mbledhjes dhe zbritjes grafike dhe aritmetike të segmenteve?
- Si mund t'i zbatoj këto njohuri në situata praktike?

Punë e pavarur

Në disa prej detyrave ka nevojë të përdorni raportet.

1. Në një rrugë ka hapësirë për parkim të automobilave. Gjatësia e parkingut është 24 metra, ndërsa gjatësia e një automobili është 4 metra. Nëse ndërmjet dy automobilave duhet të ketë distancë minimale prej 1 metri, paraqitni grafikisht se si do të duket shpërndarja e automobilave dhe njehsoni sa automobila mund të parkohen në këtë vend parkimi.
2. Pranë një autostrade të drejtë janë vendosur tri shtylla në pikat M, N dhe P. Distanca mes shtyllave janë: $\overline{MP} = 5$ km, $\overline{MN} = 7$ km. Sa është distanca mes shtyllave në pikat N dhe P, nëse:
 - a) Shtylla P është ndërmjet shtyllave M dhe N
 - b) Shtylla M është ndërmjet shtyllave N dhe P.
3. Mirkoja planifikon të bëjë një gardh rreth oborrit të tij. Oborri ka formë të drejtkëndëshit me gjatësi 8 metra dhe gjerësi 5 metra.
 - a) Në mënyrë grafike përcaktoni gjatësinë e përgjithshme të gardhit të këtij oborri.
 - b) Nëse një panel i gardhit që do të përdoret për rrethim është i gjatë 6,5 metra, në mënyrë grafike tregoni sa panele do të jenë të nevojshme për ndërtimin e gjithë gardhit.
4. Një inxhinier planifikon të ndërtojë një urë e cila do të ketë dy pjesë:
 - Pjesa e parë ka gjatësi të barabartë 4,2 m
 - Pjesa e dytë ka gjatësi të barabartë 3.8 m.
 - a) Vizatoni segmentet $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$ që do të paraqesin gjatësitë e këtyre pjesëve.
 - b) Konstruktioni një segment të ri që do të përfaqësojë gjatësinë e përgjithshme të urës.
 - c) Nëse inxhinieri ka vendosur ta shkurtojë urën për 2 metra, konstruktioni një segment të ri që do të përfaqësojë gjatësinë e re më të shkurtër të urës.
5. Jasna dëshiron të ndërtojë një shteg në oborrin e saj që do të jetë vijë e drejtë. Shtegu do të ketë gjatësi 10 metra, por do të duhet një pjesë e tij, nga njëra anë, të hiqet që të mund të vendoset hyrja në oborr. Gjatësia e hyrjes do të jetë 4 m. Me konstruktim caktoni sa do të jetë gjatësia e re e shtegut.
6. Lena ka një shirit me gjatësi të përgjithshme $\overline{AB} = 12$ dm. Ajo dëshiron ta shfrytëzojë për dekorim të dy dollapëve në shtëpinë e saj. Gjatësia e shiritit që do të nevojitet për dekorim të secilit dollap është $\overline{CD} = 5$ dm.
 - a) Vizatoni segmentin $\overline{AB}$ që do të përfaqësojë gjatësinë e përgjithshme të shiritit dhe segmentin $\overline{CD}$ që do të përfaqësojë gjatësinë e një dollapi.
 - b) Me kompas, konstruktioni një segment të ri që do të përfaqësojë gjatësinë e mbetur të shiritit.
 - c) Njehsoni sa centimetra shirit do të mbeten pas dekorimit të të dy dollapëve.

Konstruktimi i drejtëzave paralele dhe normale dhe i simetrales së segmentit

Nga kjo njësi mësimore do të mësoi se si të konstruktioni drejtëza paralele dhe normale (pingule), si dhe konstruktimin e simetrales (përmesores) të segmentit. Këto koncepte janë shumë të rëndësishme për të kuptuar vetitë gjeometrike të drejtëzave dhe segmenteve dhe do të ndihmojnë për zgjidhjen e detyrave gjeometrike. Me këto njohuri do të mundni të punoni me konstruktione të ndryshme gjeometrike dhe do të fitoni shkathtësi të reja që do të ndihmojnë më tej në zgjidhjen e problemeve më të ndërlikuara gjeometrike.



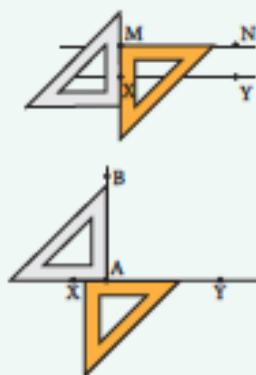
Shembulli 1

Markoja dëshiron të vizatojë rrugë që është paralele me rrugën ekzistuese dhe një tjetër rrugë që e pret rrugën ekzistuese nën kënd të drejtë. Po ashtu, ai duhet të vendos semafor në mesin e kalimit për këmbësorë.

- Me ndihmën e veglave gjeometrike, vizatoni një drejtëz dhe më pas një tjetër drejtëz që do të jetë paralele me të parën.
- Vizatoni edhe një drejtëz, por që do të jetë normale në drejtëzën e parë.
- Është dhënë një segment që përfaqëson kalimin e këmbësorëve. Vizatoni simetralen e segmentit për të shënuar mesin ku duhet të vendoset semafori.

Zgjidhje:

- Duke përdorur vizoren, e vizatojmë një drejtëz.
Për ta vizatuar drejtëzën paralele me drejtëzën e parë, vendosim dy trekëndësha pranë njëri tjetrit dhe e rrëshqasim për lart ose për poshtë derisa nuk e fitojmë drejtëzën paralele.
- Për drejtëzën normale (pingule), e përdorim këndin e drejtë të trekëndëshit ashtu që njërin anë të tij e vendosim në drejtëzën e parë, ndërsa tjetrën të jetë normale në të.
- Për të vizatuar simetralen e segmentit, ndiqni hapat në vijim:
 - Vendosni vizoren mbi segment dhe matni gjatësinë e segmentit.
 - Ndani gjatësinë për gjysmë dhe shënoni pikën e mesit të segmentit.
 - Vendosni trekëndëshin ashtu që njëra anë e tij të jetë mbi segment, kurse tjetra të kalojë nëpër pikën e mesit nën kënd të drejtë.
 - Vizatoni drejtëzën normale (pingule) që e pret segmentin në mes - kjo është simetralja e tij.



Shembulli 2

Në dritare duhet vënë dy skajore dekoruese si në figurë. Ato duhet të vendosen ashtu që njëra duhet të kalojë përmes dhe të jetë e pozicionuar nën kënd të drejtë me skajoren tjetër. Ndihmoni mjeshtrin që t'i vendos skajoret ashtu si duhet.

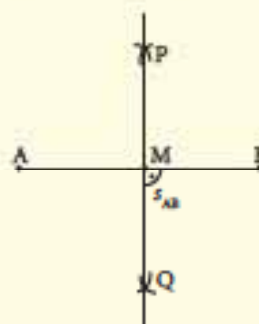
Për të përdorur matematikën gjatë zgjidhjes së këtij problemi real, do të përdorim kompasin dhe njohuritë paraprake për simetralen e segmentit.



Zgjidhje:

Hapat për konstruktimin e skajoreve me anë të kompasit:

- Me kompas vizatoni skajoren horizontale si segment me gjatësi të caktuar (për shembull, 4 cm).
- Shënoni pikat e skajshme të segmentit dhe emërtoni me A dhe B.
- Vendosni majën e kompasit në pikën A dhe hapni më shumë se gjysma e gjatësisë së segmentit.
- Vizatoni nga një hark mbi dhe nën dy anët e segmentit.
- Pa e ndryshuar hapjen e kompasit, përsëritni të njëjtën edhe nga pika B, ashtu që dy çiftet e harqeve të priten. Pikat e fituara me prerjet e harqeve mbi dhe nën segmentin shënoni me P dhe Q, përkatësisht.
- Lidhni me vizore pikat P dhe Q në të cilat janë prerë harqet.
- Drejtëza e fituar e ndan segmentin AB në dy pjesë të barabarta dhe është normale ndaj segmentit. Kjo është simetralja e AB, shënojmë me s_{AB} .
- Shëno me M pikën në mes të segmentit AB.



Kjo skajore është normale me skajoren e parë, që do të thotë se formon kënd 90° me të.

Me hapat e sipërpërmendur mjeshtri do të mundet ti vendos siç duhet skajoret në dritare!

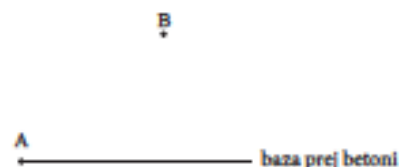
Detyra 1

Në fletoren tuaj rishtas vizatoni segmentet dhe konstruktioni simetralet e tyre.



Shembulli 3

Në një kantier ndërtimi dy shtylla duhet të vendosen pingul me bazën prej betoni e cila tashmë është shtruar. Gjatë kësaj, për njërin shtyllë dimë se në cilën pikë të bazës duhet të vendoset, ndërsa për tjetrën shtyllë dimë se në cilën largësi nga baza e betonuar duhet të qëndrojë. Si inxhinier i kantierit të ndërtimit, ke detyrë të bësh konstruksionin me të cilin do t'i paraqesësh të dy shtyllat.



Zgjidhje:

Hapat që duhet ndjekur për konstruktimin e të dyja shtyllave

I. Konstruktimi i shtyllës në pikën e dhënë në bazën prej betoni (konstruktimi i normales së drejtëzës nëpër pikën e dhënë që shtrihet në atë drejtëz).

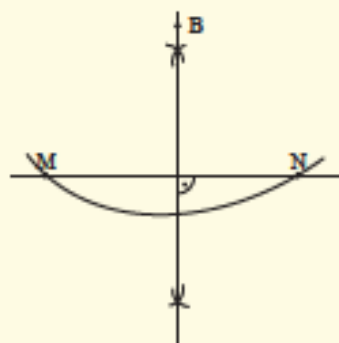
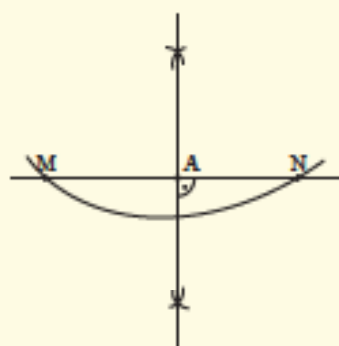
Këta janë hapat e konstruktimit:

- Vizatoni me vizore drejtëzën horizontale p , që do të përfaqësojë bazën e betonuar.
- Përzgjidhni pikën A në drejtëzën p dhe shënoni atë si vendndodhje e shtyllës së parë.
- Vendosni majën e kompasit në pikën A dhe duke marrë një hark rrethor shënoni dy pika M dhe N në bazë, njëra majtas dhe tjetra djathtas pikës A .
- Pa ndryshuar hapjen e kompasit, vendosni majën e tij në pikën M dhe vizatoni një hark sipër dhe një hark nën segmentin MN .
- Përsëritni veprimin e njëjtë nga pika N , ashtu që çiftet e harqeve do të priten.

Lidhni pikën A me vendin ku priten harqet – kjo drejtëz është pingul me bazën dhe paraqet shtyllën e parë.

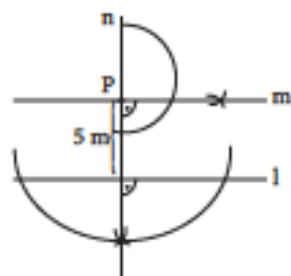
II. Konstruktimi i shtyllës së dytë që kalon nëpër një pikë jashtë bazës së betonit.

Ky është rasti i konstruktimit të normales së drejtëzës nëpër pikë e cila nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë. Shfrytëzoni vizatimin e ofruar sipas së cilit do t'i përshkruani hapat në fletoren tuaj dhe do ta bëni konstruktimin e kërkuar.



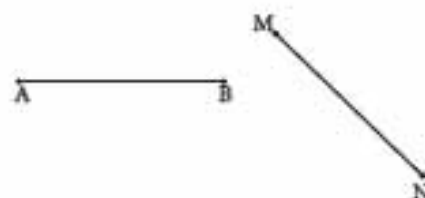
Shembulli 4

Për rregullim më të mirë hortikulturor, vendi i oborrit duhet të ndahet në disa pjesë duke tërhequr drejtëza paralele në distancë 5 metra nga njëra-tjetra. Pra, janë dhënë drejtëza l dhe pika P që është në largësi 5 m nga l . Detyra juaj është të konstruktioni drejtëzën $m \parallel l$ që kalon nëpër P . Përdorni vizatimin e dhënë dhe shkruani hapat dhe bëni konstruktimin në fletoren tënde.



Detyra 2

Vizatoni rishtas segmentet në fletoren tuaj. Nëpër pikën S që është pika ku priten simetralet e segmenteve AB dhe MN , konstruktioni drejtëzën p që është pingul në drejtëzën AM dhe drejtëzën q paralele me drejtëzën BN .



Shembulli 5:

Në një rrugë duhet të vendoset një stacion i ri i autobusëve. Platforma e stacionit duhet të jetë pingul me skajin e trotuarit, ndërsa konstruksioni i kulmit duhet të jetë paralel me të. Si inxhinier, ke detyrë që të bësh konstruktimin e saktë për vendosjen e duhur të platformës dhe kulmit.

- Konstruktioni platformën si segment normal (pingul) me skajin e trotuarit.
- Konstruktioni drejtëz që do të jetë paralele me skajin e trotuarit dhe do të përfaqësojë konstruksionin e kulmit.

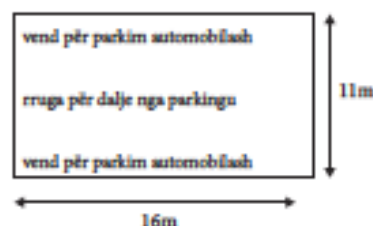
Zgjidhje:

Hapat e konstruksionit:

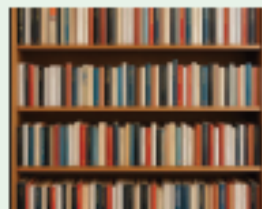
- Vizatoni drejtëzën p , e cila do të paraqes skajin e trotuarit.
- Zgjidhni pikën A në këtë drejtëz ku do të jetë e vendosur platforma.
- Me kompas:
- Shënoni dy pika B dhe C në drejtëzën p , në distanca të njëjta nga pika A .
- Vendosni majën e kompasit në pikën B dhe me rreze më të madhe se gjysma e segmentit BC dhe bëni një hark mbi segmentin BC .
- Më pas vendosni kompasin në pikën C me rreze të njëjtë dhe bëni një lak tjetër që e pret të parin.
- Pikën prerëse të harqeve shënoni me D dhe lidhni me pikën A . Segmenti i fituar $\overline{AD}$ është pingul në p dhe e paraqet platformën.
- Për konstruktimin e kulmit:
- Zgjidhni pikën E nëpër të cilën do të jetë vendosur kulmi.
- Duke përdorur kompasin, konstruktioni drejtëzën q paralel me p që kalon nëpër E .
- Kjo drejtëz q e përfaqëson konstruktin e kulmit.

Detyra 3

Në vizatimin djathtas është paraqitur hapësira parkuese në të cilën duhet të vizatohen vija paralele me të cilat do të nënvizohen vendparkimet e automobilave. Ato duhet të radhiten në dy rreshta dhe të lihet hapësirë ndërmjet rreshtave për dalje nga parkingu. Vizatoni vijat e hapësirës parkuese dhe caktoni sa është numri më i madh i mundshëm i automobilave që mund të nxë ky parking, nëse hapësira për një automobil duhet të ketë formën e një drejtkëndëshi me dimensione 4m me 2 m. (Dimensioni i hapësirës parkuese është 16 me 11 metra, ndërsa dalja është tre metra e gjerë nga ana e parkingut me gjatësi 11 metra).



Si do t'i përdornit drejtëzat paralele dhe pingule, si edhe simetralen e segmentit në situata nga përditshmëria, si për shembull, në arkitekturë, dizajnim mobilesh ose madje edhe gjatë pikturimit? Sqaroni se si këto konstruksione mund t'u ndihmojnë për të ndërtuar konstruksione precize dhe të rregullta.

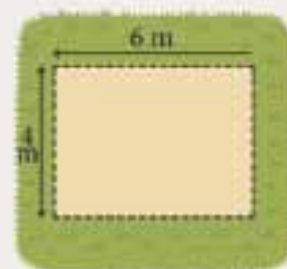


Përgjigjuni në fletore! Për çka nuk jeni të sigurt kthehuni përsëri në ato pjesë të njësishë mësimore.

1. Sa mirë i kuptoj konceptet themelore gjeometrike, sikurse janë drejtëzat paralele dhe ato pingule si dhe simetralen e segmentit dhe konstruktivet e tyre?
2. A ia arrij t'i përdor këto konstruksione në detyrat e lidhura me dizajn, arkitekturë ose situata nga përditshmëria?
3. Cili konstruksion ishte më i vështirë dhe pse?
4. Cili konstruksion ishte më i lehtë dhe si e zbatova?
5. A jam i gatshëm t'i zbatoj këto koncepte gjeometrike në detyra dhe sfida të reja?

Punë e pavarur

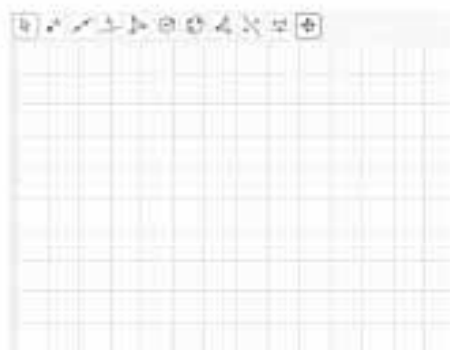
1. Paralel me rrugën e dhënë, nga ana e njëjtë, duhet të vendosni dy shtigje paralele për këmbësorë. (Përdorni raport)
 - a) Konstruktoni dy shtigjet paralele duke përdorur kompas, ashtu që shtegu i parë të jetë në distancë 3 metra nga rruga, ndërsa shtegu i dytë të jetë në distancë 6 metra nga shtegu i parë.
 - b) Caktoni distancën e rrugës me shtegun e dytë.
2. Në projektin për rregullimin e sipërfaqes së oborrit për detyrë keni të vendosni një kopsht me lule i cili do të qëndrojë pingul me shtegun e këmbësorëve në oborr.
 - a) Zgjidhni një pikë në shtegun kryesor nga ku do të filloni ndërtimin e kopshtit të luleve.
 - b) Konstruktoni drejtëz pingule, nga ajo pikë, e cila do ta pret shtegun kryesor dhe përgjatë kësaj drejtëze do të jetë kopshti i luleve.
3. Janë dhënë dy pika në distancë 8 cm nga njëra-tjetra. Gjeni pikën e mesme mes këtyre dy pikave duke konstruktuar simetralen e segmentit që këto dy pika i ka pika të skajshme.
4. Në projektin e ndërtimit të një shtegu duhet të konstruktoni dy drejtëza paralele që do të përfaqësojnë anën e poshtme dhe të sipërme të shtegut. Gjerësia e shtegut është 2 m. Më pas duhet të konstruktoni një shteg tjetër pingul me të parin dhe tek i cili distanca mes anës së majtë dhe të djathtë të (gjerësia) shtegut është 2.5 m.
5. Parku ka formë të drejtkëndëshit me dimensione 6 m me 4 m. Në projektin e planifikimit të shtigjeve në park duhet të shtrohen dy shtigje. Shtegu i parë duhet të shtrohet paralel me gjatësinë e parkut në distancë 1 m dhe me gjatësi 8 m. Shtegu i dytë duhet të jetë pingul në të parin dhe ta ndaj atë në dy pjesë të barabarta.



Konstruktimi i elementeve gjeometrike me softuer arsimor

Në këtë njësi mësimore do të njihesh me një aspekt të rëndësishëm të gjeometrisë – konstruktimin e elementeve gjeometrike, por me ndihmën e softuerit arsimor bashkëkohor. Përdorimi i veglave digjitale për vizatim dhe konstruktiv në detyra gjeometrike në masë të madhe e lehtëson procesin e të nxënës, duke dhënë mundësinë që të kemi pamje më të mirë si dhe të hulumtojmë konstruktivet gjeometrike në një mënyrë më të thjeshtë dhe më ndërvepruese.

Qëllimi i kësaj njësie nuk është vetëm për të zhvilluar shkathtësitë teknike për punë me softuer, por edhe të përmirësoni të kuptuarit e koncepteve bazike gjeometrike. Me ndihmën e veglave ndërvepruese do të fitoni siguri dhe do të jeni më efikas në zgjidhjen e problemeve gjeometrike. Softuerët si GeoGebra, Geometer's Sketchpad dhe të tjerë të ngjashëm me to mundësojnë ndërveprim dinamik me objektet gjeometrike dhe e bëjnë matematikën më të kuptueshme dhe më të afërt me jetën reale. Softuerët gjeometrikë përdoren për kryerjen e shpejtë dhe të saktë të konstruktiveve gjeometrike, që do t'i përdorni në mësimin e mëtejshëm të gjeometrisë, si dhe në detyrat ditore që përfshijnë planifikim, projektim dhe analizë.



Shembulli 1

Në një fabrikë për lodra prodhohen komponenta të ndryshme të lodrave. Detyra juaj është të vizatoni një pjesë të lodrës që duhet të jetë me formë drejtkëndore me brinjë 6 cm dhe 4 cm.

Zgjidhje:

Që të realizoni këtë detyrë, do të duhet të kryeni më shumë konstruktive gjeometrike.

1. Konstruktivimin e një segmenti të njëjtë me segmentin e dhënë. Filloni me dhënieën e një segmenti (ane) të lodrës me gjatësi prej 6 cm. Detyra juaj është të vizatoni segmentin me gjatësi sa ajo e segmentit të dhënë (AB).
2. Konstruktivi i drejtëzave pingule: Në pikat e skajshme të segmentit konstruktivni dy drejtëza pingule në të.
3. Shënjoni dy pika C dhe D në secilën prej drejtëzave të fituara pingule, nga një në secilën prej tyre, në distancë 4 cm nga pikat e skajshme të segmentit të parë, (B, A).
4. Lidhni katër pikat që të formoni drejtkëndëshin. Mendoni dhe shkruani hapat e konstruktivit nëse më parë e përdorni vetinë e brinjëve paralele të drejtkëndëshit.

Shembulli 2

Përdorni veglat e softuerit arsimor për të konstruktuar segment të barabartë me segmentin e dhënë, simetralen e segmentit dhe drejtëza paralele e pingule.

Zgjidhje:

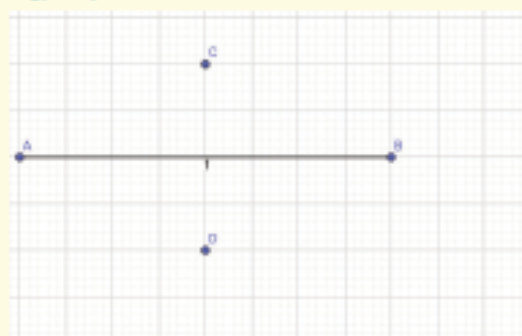
- Konstruktimi i segmentit që është i barabartë me një segment të dhënë: Zgjidhni një segment dhe përdorni veglën për kopjim që të konstruktioni një segment të dytë të njëjtë me të parin.
- Konstruktimi i simetrales: Zgjidhni veglën përkatëse nga menyja dhe krijoni simetralen e segmentit.
- Konstruktimi i drejtëzave paralele dhe drejtëzave pingule: Veglat përkatëse u mundësojnë të krijoni qoftë drejtëza paralele qoftë drejtëza pingule me drejtëzën e dhënë.

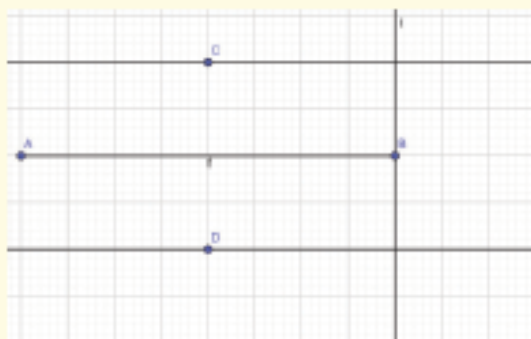
Shembulli 3

Shfrytëzoni softuer arsimor për të vizatuar një kalim për këmbësorë në rrugë.

1. Vizatoni një drejtëz që do të përfaqësojë rrugën: filloni me vizatimin e një segmenti që do të paraqet vijën e mesme të rrugës.
2. Përdorni vija paralele për të shënuar skajet e kalimit: vizatoni dy vija paralele nga secila anë e segmentit që paraqet rrugën. Këto vija do t'i shënojnë skajet e kalimit për këmbësorë.
3. Përdorni vija pingule për të shënuar "vijat e zbrër" në kalim: vizatoni drejtëza pingul me drejtëzat paralele që do të përfaqësojnë "vijat e zbrës" në kalimin për këmbësorë.

Zgjidhje:



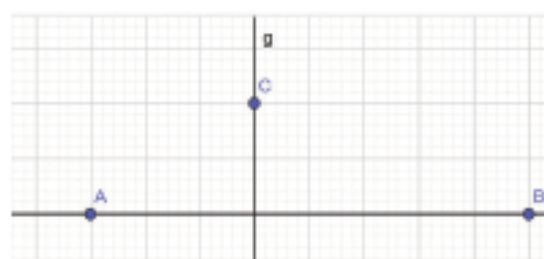
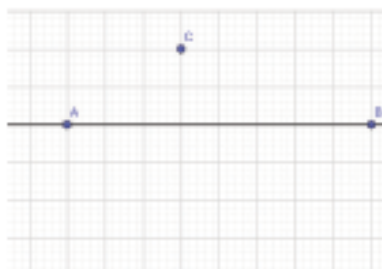


Shembulli 4

Jeni duke punuar në një plan për ndërtimin e urës. Ura juaj duhet të ketë një gardh mbrojtës.

- Vizatoni një segment që do të përfaqësojë urën.
- Përdorni simetralen për të ndarë urën në dy pjesë të barabarta.
- Shtoni vija paralele për të shënuar anët e urës.
- Vizatoni drejtëza pingul në urën që do të përfaqësojnë shtyllat që e mbajnë urën.

Për këtë detyrë, përdorni softuer arsimor. Udhëzim: Në vizatime është paraqitur procedura e vizatimit të drejtëzës pingule në drejtëzën AB, e lëshuar nëpër pikën C që nuk i takon drejtëzës AB.



Vizatoni një plan për një objekt/hapësirë të re publike (park, urë ose rrugë). Përdorni softuer arsimor për:

- Konstruktimin e segmenteve që do të përfaqësojnë strukturën kryesore.
- Përdorni simetrale, drejtëza paralele dhe drejtëza pingule për të dizajnuar detajet. Përpikuni që me vegla të tjera të softuerit arsimor të paraqitni hapësirën.

Më pas, përgjigjuni pyetjeve në vijim:

- Cilët hapa ishin më të lehtë, e cilët më të vështirë gjatë konstruktimit?
- Si të ka ndihmuar softueri arsimor për të qenë më i saktë?
- Çka do të kishe bërë ndryshe një herë të dytë?

Vlerësoni veten me ndihmën e këtij shkallëzimi:

- E kuptoj qartë konceptin e segmentit dhe simetrales.
- Di, me softuer, t'i konstruktoj drejtëzat paralele dhe ato pingule.
- Mund, në mënyrë të pavarur, të përdor softuerin arsimor në situata reale.

Punë e pavarur

Detyrat në vijim i zgjidhni me softuer gjeometrik, nëse keni mundësi. Nëse jo, atëherë i zgjidhni në fletoren tuaj. (Përdorni raport)

1. Në një park ka shteg të gjatë 6 m. Duhet të bëhet një shteg tjetër pingul me të parin dhe që kalon saktësisht përmes tij.
2. Jepet drejtëza dhe një pikë që nuk i takon asaj. Nëpër këtë pikë konstruktoni drejtëz paralele me drejtëzën e dhënë.
3. a) Vizatoni një drejtkëndësh që paraqet bazën e fushës së tenisit, në një oborr.
b) Vizatoni dhe shënjoni dy diagonalet e drejtkëndëshit.
c) Konstruktoni simetralen e njëres diagonale. Ku kalon ajo? Çka mund të thoni për diagonalet e drejtkëndëshit?
4. Dy shtigje për këmbësorë duhet të kryqëzohen në kënd të drejtë në një pikë të dhënë të njërit shteg. Në fletore paraqitni konstruktimin e kësaj situatë.
5. Dritarja ka formë katrore. Vizatoni njëren diagonale të katrorit. Nëpër pikën e mesme të diagonales konstruktoni drejtëz pingule në diagonale.
a) Nëpër cilat pika kalon drejtëza pingule me diagonalen?
b) Çka mund të thuani për drejtëzën pingule me diagonalen?

6. Kopshti në formë të drejtkëndëshit duhet të ndahet në dy pjesë të barabarta. Cilin konstruktiv gjeometrik do ta shfrytëzoni? Në sa mënyra mund të ndahet kopshti?
7. Dy ura duhet të jenë paralele dhe të kalojnë nëpër dy pika të dhëna. Konstruktioni vija paralele që kalojnë nëpër dy pikat e dhëna për të ilustruar situatën.
8. Në një park formë drejtkëndore (9 m me 6 m) duhet të vendosen shtigje ku disa do të jenë të shpërndarë paralel me gjatësinë e drejtkëndëshit në çdo 3 m, ndërsa të tjerë pingul me gjerësinë e drejtkëndëshit në çdo 2 m. Konstruktioni shtigjet. Shpjegoni se cilat shtigje janë reciprokisht paralel e cilat janë reciprokisht pingul. Pse?

Konceptet themelore për këndet dhe gjysmërrafshet

Në jetën e përditshme shpesh rastisim forma, vija dhe kënde – nga dizajni i dritareve dhe dyerve në shtëpitë e juaja e deri te shtigjet vijëlakuara nëpër parqe. Që t'i kuptojmë dhe përdorim këto fenomene, është e rëndësishme të kemi njohuri mbi konceptet bazike gjeometrike, sikurse janë gjysmërrafshet dhe këndet.



Gjatë kësaj njësie mësimore do të mësoni konceptin e gjysmërrafshit, këndit konveks dhe atij jokonveks dhe si t'i zbatoni kur të keni nevojë në rastet edhe të përditshmërisë sikurse janë dizajnimi i hapësirave dhe zgjidhja e problemeve.

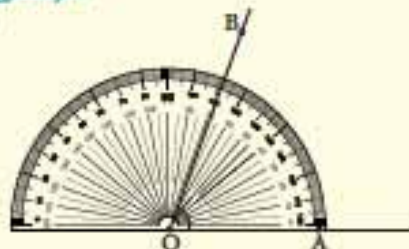
Shembulli 1

Ana instalon një panel solar në oborrin e saj. Për të fituar kënd më të mirë për përthithjen e dritës diellore, paneli duhet të instalohet në kënd saktësisht 67° në lidhje me bazën. Ajo vizatoi një kënd në letër, por nuk di si t'i shënojë elementet e tij që të mund të mat dhe të kontrollojë nëse është i saktë. Që t'i ndihmoni Anës:

- a) Vizatoni këndin 67° me këndmatës.
- b) Emërtoni elementet e këndit (kulmin dhe krahët).

Zgjidhje:

a)



- b) Kulmi i këndit është O. Në çdonjërin prej krahëve përzgjidhni nga një pikë dhe emërtoni ato, për shembull A në njërin krah dhe B në krahun tjetër (krahët e këndit janë OA dhe OB).

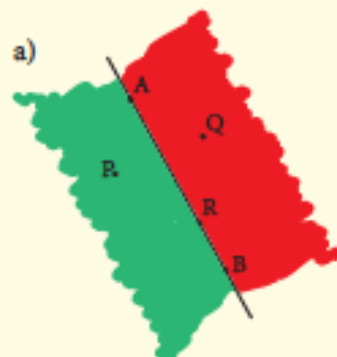
Shembulli 2

Në një park ndërtohet një rrugë e cila duhet ta ndajë parkun në dy pjesë – pjesën me ngastra lulesh dhe pjesën me kullosë. Inxhinierët e filluan punën duke shënuar rrugën me vijë të drejtë AB.

- a) Shënoni me ngjyra të ndryshme pjesët e dy anëve të drejtëzës AB.
b) Caktoni dhe merrni shënim se cilat pika të rrafshit të parkut i takojnë njërës dhe cilat tjetrës anë të drejtëzës.
c) Përshkruani me fjalë çka paraqet koncepti “gjysmërrafsh”.

Zgjidhje:

- b) Pika P është në pjesën e gjelbër të rrafshit, përkatësisht në anën e majtë të drejtëzës AB. Pika Q është në pjesën e rrafshit të ngjyrosur me të kuqe, përkatësisht në anën e djathtë të drejtëzës AB. Në drejtëzën AB shtrihet pika R.
c) Gjysmërrafshi është pjesë e rrafshit e kufizuar me një drejtëz dhe përbëhet nga gjitha pikat e rrafshit të cilat shtrihen në njërën anë të drejtëzës dhe pikat e vetë drejtëzës.



Gjitha pikat e një rrafshi që janë në njërën anë të drejtëzës së dhënë në rrafsh bashkë me pikat e asaj drejtëze formojnë formë 2D gjeometrike që e quajmë gjysmërrafsh. Për drejtëzën themi se është drejtëza kufitare ose tehu i atij gjysmërrafshi.

Detyra 1

Imagjinoni se qelqi i dritares ose sipërfaqja e derës është e sheshtë. Nëse vendosni një vijë që qelqin e dritares ose sipërfaqen e derës e ndan në dy pjesë, cilat pjesë janë gjysmërrafshe?

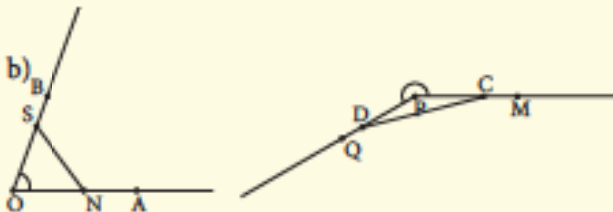
Shembulli 3

Në vizatim janë dhënë dy kënde.

- a) Cili kënd është më i vogël, e cili është më i madh se 180° ?
- b) Vizatoni këndet rishtas në fletoren tuaj dhe shënoni secilin prej tyre.
- c) Zgjidhni pika në krahët e secilit prej këndeve dhe lidhni ato.
- ç) Çka mund të thuani për segmentin që fituat në secilin kënd pikat e skajshme të të cilit janë pikat e krahëve të atij këndi?



Zgjidhje:

- a) $\angle AOB = 70^\circ$ është më i vogël se 180° .
 $\angle MPQ = 210^\circ$ është më i madh se 180° .
- b) 
- c) Segmenti NS është i tillë që pikat e skajshme të tij janë pika të krahëve dhe i gjithë segmenti shtrihet në $\angle AOB$. Segmenti CD është i tillë që pikat e skajshme u takojnë krahëve respektivë të këndit, por ai nuk shtrihet në $\angle MPQ$. Përfundojmë se këndet $\angle AOB$ dhe $\angle MPQ$ dallojnë.

Për një kënd themi se është konveks nëse çdo segment me pika të skajshme në krahët e këndit plotësisht shtrihet në atë kënd.

Koncepti i këndit konveks është rast i veçantë i konceptit më të përgjithshëm të formës konvekse.

Një formë rrafshore gjeometrike F (nënbashkësi e pikave të rrafshit) quhet formë konvekse nëse për çdo dy pika M dhe N të F , segmenti MN plotësisht shtrihet në F , përkatësisht segmenti MN është nënbashkësi e formës F .

Detyra 2

Shpjegoni pse drejtëzat, gjysmëdrejtëzat, segmentet, rrafshi, gjysmërrafshi janë forma konvekse?

Detyra 3

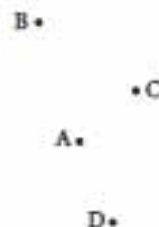
Çfarë këndi mes veti formojnë akrepat e orës nëse:

- a) ora tregon 3:00? b) ora tregon 10:10?

Shembulli 4

Katër nga lojtarët e një ekipi basketbolli janë vendosur në fushë si në vizatim. Ndhmoni trajnerin të caktojë:

- Lojtari në pikën D a është në gjysmërrafshin e njëjtë me lojtarin në C në lidhje me drejtëzën që formohet nga pozicionet e lojtarëve A dhe B?
- Me këtë vendosje të lojtarëve A, B dhe C a thua formohet kënd konveks ose jokonveks me kulm në pikën B?



Zgjidhje:

Bëni vizatimin, në fletore, sipas udhëzimeve të dhëna.

- Nëse tërhiqni drejtëzën AB, është e qartë atëherë se pikat C dhe D janë në anë të njëjtë të saj, përkatësisht shtrihen në gjysmërrafsh të njëjtë.
- Nëse vizatoni gjysmëdrejtëzat BA dhe BC, fitohen dy kënde me kulm në pikën B, të tillë që njëri është konveks (këndi pikë e brendshme e të cilit është pika D) dhe tjetri jokonveks (për të pika D është pikë e jashtme). Emërtoni secilin kënd.

Detyra 4

Tri ulëse në oborrin e shkollës janë vendosur në kulmet e një trekëndëshi të imagjinuar ABC...

- Ulësja në pikën C, a thua është në gjysmërrafshin në të cilin është ulësja A ndaj drejtëzës që është e formuar me pozicionet e ulëseve A dhe B?
- Me këtë vendosje të ulëseve A, B dhe C, a thua formohet formë 2D konvekse ose jokonvekse?

Detyra 5

Kopshti është ndarë me shteg që shkon nga pika P(2, 1) deri te pika Q(6, 5). Ngastra e luleve është e vendosur në pikën R(4, 3). Përgjigjuni pyetjeve në vijim:

- Cilit gjysmërrafsh, të përcaktuar me drejtëzën PQ, i takon pika R?
- Këndi $\angle PQR$ a është konveks ose jokonveks?

Detyra 6

Jepni projektin tuaj për kopshtin. Vendosni shtigje sipas dëshirës të cilët do të priten nën kënde të ndryshme. Vizatoni në letër ose përdorni softuer arsimor për të shënuar këndet mes shtigjeve. Klasifikoni këndet e fituara si kënde konvekse ose jokonvekse.

Vlerësoni përgjigjen tuaj sipas kriterëve vijues:

- Janë identifikuar gjitha këndet.
- Saktësisht janë klasifikuar si kënde konvekse ose jokonvekse.
- Janë shpjeguar arsyet pse secili kënd i takon kategorisë përkatëse.

Pse është e rëndësishme të dini të bëni dallimin mes këndeve konvekse dhe atyre jokonvekse në jetën reale? Cilët shembuj nga përditshmëria më shumë u ndihmuan të kuptoni gjysmërrafshet dhe këndet?

Në fletoren tuaj përgjigju me PO ose JO në pohimet vijuese:

1. Mund të dalloj dhe të emërtoj kënde dhe gjysmërrafshe.
 2. Dalloj këndin e ngushtë, të drejtë, të gjerë dhe të shtrirë.
 3. Mund të klasifikoj këndet si konvekse ose jokonvekse.
 4. Mund të vizatoj dhe shënoj me korrektësi kënde dhe gjysmërrafshe.
 5. Me sukses mund të zgjidh detyra lidhur me kënde dhe gjysmërrafshe.
- Nëse ke më shumë përgjigje "JO", atëherë përsërit pjesët që i ke më pak të qarta.

Punë e pavarur

1. Lumi që kalon përmes një qyteti, e ndan atë në dy pjesë. Lumin e përfaqëson drejtëza AB, ku A(2,2) dhe B(6,2). Parku gjendet në pikën C(4,4), ndërsa shkolla e qytetit në pikën D(4,1).
 - a) Parku dhe shkolla, a janë në gjysmërrafshin e njëjtë të përcaktuar me drejtëzën kufitare AB?
 - b) Cilat nga pikat janë në anën e njëjtë të lumit: E(5,5), F(1,1) dhe G(3,7).
2. Në një park ka tre shtigje që priten në pikat A(3,2), B(6,4) dhe C(5,6). Tre shtigjet formojnë trekëndëshin ABC.
 - a) Vizatoni të tre shtigjet dhe shënoni këndin $\angle ABC$.
 - b) Këndi $\angle ABC$ për të cilin pika (5,4) është pikë e brendshme, është konveks ose jokonveks? Shpjegoni pse!
3. Oborri i një shtëpie është ndarë me shtegun që në sistemin koordinativ kalon nëpër pikat A(1,5) dhe B(4,3). Në oborr fontana gjendet në pikën F(3,5), ngastra e luleve në G(2,1) dhe zgara në pikën H(4,7).
 - a) Vizatoni drejtëzën AB dhe shënjoni pikat F, G dhe H.
 - b) Cilat nga pikat F, G dhe H janë në anë të njëjtë të shtegut?
 - c) Cila nga pikat është më larg shtegut?
4. Në fushën sportive është vënë një portë futbollit me pikat A(1,3) dhe B(5,3). Lojtari gjendet në pikën C(4,6), ndërsa topi në pikën D(2,5).
 - a) Vizatoni drejtëzën AB e cila përfaqëson portën dhe pikat C dhe D.
 - b) Këndi ACD, me pikë të jashtme B, a thua është konveks ose jokonveks?
 - c) Cila nga pikat C(4,6) ose D(2,5) është më pranë drejtëzës AB?

5. Vizatoni një shteg vrapimi që e ndan parkun në dy gjysmërrafshë. Shtegu fillon në pikën $A(1,3)$ dhe shtrihet deri në pikën $B(5,3)$. Në park ka një skulpturë artistike në pikën $C(3,6)$. Përgjigju pyetjeve në vijim:
- Në cilin gjysmërrafsh, të përkufizuar me drejtëzën AB , është pika C ?
 - Këndi $\angle ACB$, për të cilin origjina e sistemit koordinativ është pikë e brendshme, është konveks ose jokonveks?

Matja, vlerësimi dhe vizatimi i këndeve

Në jetën e përditshme shpesh rastisim me situata ku duhet të vlerësojmë madhësinë e një këndi. Për shembull, arkitektët në punën e tyre, duhet të përcaktojnë saktësisht nëse këndi i kulmit është i ngushtë, i gjerë ose jokonveks për të siguruar stabilitet dhe funksionalitet.

Në këtë njësi mësimore do të mësoni:

- Si të dalloni dhe matni kënde të ngushta, të gjera dhe jokonveksë deri në gradën më të afërt.
- Si të vlerësoni madhësitë e këndeve deri në dhjetëshen më të afërt.
- Si t'i zbatoni dituritë në situata reale.

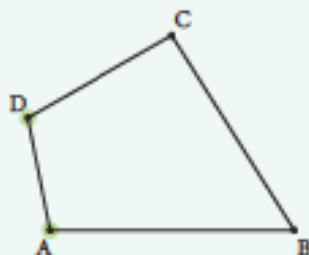
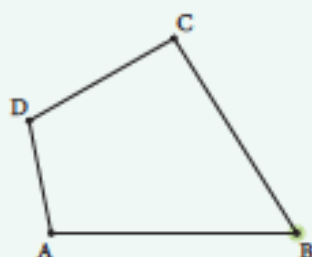
Shembulli 1

Në një park është planifikuar të ndërtohen shtigje që formojnë kënde përreth fontanës. Ato janë vendosur me sa vijon:

- Shtegu AB dhe BC priten në pikën B dhe formojnë $\angle ABC$ prej 50° .
 - Shtegu BC dhe CD priten në pikën C dhe formojnë $\angle BCD$ prej 90° .
 - Shtegu CD dhe DA priten në pikën D dhe formojnë $\angle CDA$ prej 120° .
 - Shtegu DA dhe AB priten në pikën A dhe formojnë $\angle DAB$ prej 100° .
- Caktoni cilat kënde janë të ngushtë, të drejtë, të gjerë ose jo konveks.
 - Vizatoni planin e shtigjeve dhe shënjoni këndet.
 - Imagjinoni sikur në park duhet të vendosen llamba në çdo kënd:
 - Nëse duhet që llambat të vendosen vetëm në kulmet e këndeve të ngushta, atëherë në cilat pika do t'i vendosnit?
 - Nëse duhet që llambat të vendosen në gjitha kulmet që janë më të mëdhenj se 90° , atëherë në cilat pika do t'i vendosnit?

Zgjidhje:

c)



Shembulli 2

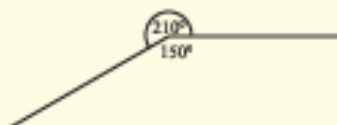
Propozim-plani i dhomës së ndenjes në një banesë parashikon projektim preciz, përkatësisht duhet të matet dhe vizatohet çdo kënd mes mureve deri në gradën më të afërt.

Arkitekti i caktoi këndet në vijim:

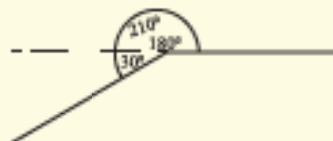
- Këndi mes murit verior dhe atij lindor është 65° .
 - Këndi mes murit jugor dhe tavanit është 120° .
 - Këndi mes murit perëndimor dhe atij jugor është 210° .
- Vizatoni këto kënde në fletore duke shfrytëzuar këndmatësin.
 - Caktoni se cili prej tyre është i ngushtë, i drejtë, i gjerë dhe kënd jokonveks.
 - Shpjegoni akoma se si të përdoret këndi prej 90° për të kontrolluar këndet prej 65° dhe 120° .

Zgjidhje:

a) Vizatimi i këndeve:



Për 210° është përdorur matja e këndit plotësues ($360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$)



ose si mundësi e dytë $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

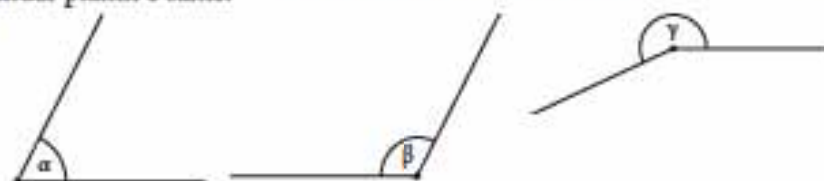
b) Klasifikimi i këndeve:

- 65° është kënd i ngushtë (më i vogël se 90°)
- 120° është kënd i gjerë (mes 90° dhe 180°)
- 210° është kënd jokonveks (më i madh se 180°)

c) Prova me këndin prej 90° :

Shembulli 3

Arkitekti Marko dizajnon një dhomë të re dhe kishte vizatuar disa kënde mes mureve. Duhet të vlerësohet madhësia e këtyre këndeve deri në gradën më të afërt të shprehur me dhjetëshe të plota për të ripërpunuar planin e saktë.



a) Rishitas vizatoni në fletore tabelën.

Këndi	Madhësia e vlerësuar e këndit	Madhësia e këndit e matur me këndmatës
α		
β		
γ		

Vlerëso madhësinë e secilit kënd deri në gradën më të afërt të shprehur me dhjetëshe të plota. Futni madhësinë e vlerësuar të secilit kënd.

- b) Cili kënd është i ngushtë, i gjerë ose jo konveks?
c) Bëni vizatime ku do të paraqitni këndet me vlerat e vlerësuar.

Vlerësimi i këndeve

Për të vlerësuar këndin pa këndmatës, shfrytëzoni krahasimin pamor, për shembull:

- Këndi 45° është gjysma e këndit të drejtë (90°).
- Këndi 135° është i gjerë dhe është përafërsisht në mes të këndit 90° dhe 180° .
- Këndi jokonveks, për shembull këndi 240° , ka hark rrethor përkatës që është pothuajse sa vija e plotë rrethore me një pjesë të vogël që mungon.

Zgjidhje:

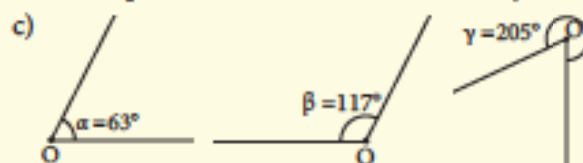
a) Vlerësimi i këndeve:

Për α : afër me 60° .

Për β : afër me 120° .

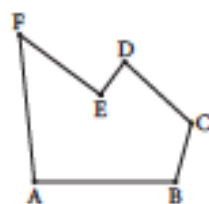
Për γ : afër me 210° .

b) Këndi i parë prej 60° është i ngushtë (më i vogël se 90°), këndi i dytë është i gjerë (mes 90° dhe 180°), përderisa këndi i tretë 210° është jo konveks (ai është më i madh se 180°).



Detyra 1

Shfrytëzoni këndmatës dhe në vizatim matni një kënd të ngushtë, të gjerë dhe një jokonveks, e më pas rishtas vizatoni këto kënde në fletoren tuaj.



Detyra 2

Vlerëso madhësinë, masën, e secilit kënd deri në gradën më të afërt në dhjetëshe të plota. Për çdo kënd, shkruani vlerësimit tuaj dhe krahasoni atë me madhësinë e vërtetë të këndit.



Detyra 3

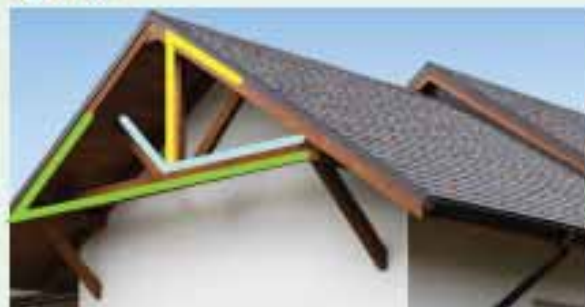
Nga figura vlerësoni këndet. A janë përafërsisht 30° , 90° ose 150° .



Shembulli 4

Vizatoni një skicë të thjeshtë të një pjese të objektit (shtëpi, kulm, ndërtesë...) me kënde të ndryshme. Shënoni këndet që janë 60° , 120° dhe 180° .

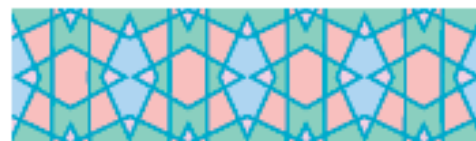
Zgjidhje:





Detyra 4

Vizatoni një ornament që do të përmbajë kënde konvekse dhe jokonvekse, e më pas ngjyrosni këndet e ngushta me ngjyrë të kuqe, këndet e gjera me të kaltër dhe këndet jokonvekse me ngjyrë të gjelbër. Në fund matni nga një kënd nga secili lloj dhe shkruani madhësinë e tij.



Detyra 5

Bëj një listë me pesë objekte në shtëpinë tënde (për shembull, korniza, enë, tavolina, dritare). Për çdo objekt:

- Vlerësoni një kënd.
- Matni këndin me këndmatës.
- Vëreni sa është dallimi mes vlerësimit dhe vlerës së matur.

Si do t'i shpjegoje një shoku çka është këndi jo konveks? Krijoni një skicë, për shembull, urë ose park, ku do të përdorni të paktën tre lloje këndesh (të ngushtë, të gjerë dhe jo konveks). Shpjegoni pse zgjodhët këto kënde. Bëni vlerësimin, e më pas kontrolloni saktësinë e vlerësimeve tuaja nga pyetja paraprake. Sa afër jeni me matjen e vërtetë?

Për të vlerësuar dituritë, përpikuni të përgjigjeni, në fletoren tuaj, në sfidat vijuese:

Pyetja 1: Vizatoni disa kënde dhe, pa përdorur këndmatësin, vlerësoni secilin prej tyre. Më pas matni ato kënde dhe krahasoni vlerësimin tuaj me vlerat e sakta. Sa afër vlerave të sakta ishit?

Pyetja 2: Trekëndëshi i çfarëdoshëm, a mund të jetë formë 2D jojonvekse? Shpjegoni!

Pyetja 3: Nëse njëri kënd është 130° :

- Sa i mungojnë deri 180° ?
- Sa i mungojnë deri 360° ?

Pyetja 4: Në cilat raste të përditshmërisë do të mundnit të përdornit dituritë për matjen e këndeve? Theksoni të paktën tre shembuj.

Nëse saktë përgjigjesh në gjitha pyetjet 🚀

Nëse përgjigjesh saktë në 3-4 pyetje, vazhdo të ushtrosh! 💡

Nëse përgjigjesh saktë në 1-2 pyetje, kthehu përsëri dhe ushtro akoma njësinë! ✖

Sfidë: Përpikuni të formuloni dhe ndani me shokët një enigmë ose detyrë lidhur me matje këndesh.

Punë e pavarur

1. Vizatoni një kënd që të jetë më i madh se 90° dhe më i vogël se 180° . Vlerësoni dhe shkruani madhësinë e tij. Më pas, matni këndin me këndmatës deri në gradën më të afërt dhe shkruani madhësinë e tij. Sa është dallimi mes madhësisë së këndit dhe madhësisë së vlerësuar të tij?

2.



Rishtas vizatoni tabelën në fletoret e juaja dhe plotësoni të njëjtën:

Këndi	Vlerësimi	Matja	Dallimi mes vlerësimit dhe matjes
Këndi 1			
Këndi 2			
Këndi 3			

3. Vizatoni një kënd prej 50° dhe një prej 130° pa këndmatës. Matni secilin kënd. Sa është gabimi që keni bërë gjatë vizatimit pa këndmatës.

Këndi qendror

A keni vërejtur se matësi i shpejtësisë në biçikletën tuaj, ora në mur ose dizajni i rrotës kanë forma që përfshijnë rrathë dhe kënde? Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si të vizatoni, shënoni dhe t'i përdorni këndet qendrore për zgjidhjen e problemeve të ndryshme.

Shembulli 1

Jana dëshiron të bëjë një dekorim për festën e datëlindjes. Ajo përdor hark rrethor për të bërë një dekorim interesant në tavanin e dhomës së saj.

Dizajni i dekorit:

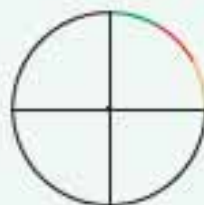
- Jana ka tre shirita: të kuq, të gjelbër dhe të verdhë.
- Ajo dëshiron që secili prej shiritave të mbulojë një pjesë të harkut rrethor, i cili është sa $\frac{1}{4}$ e rrethit të plotë.
- Pjesët e harkut rrethor që mbulohen me shiritat e ndryshëm, përkatësisht të jenë të barabartë.



- a) E sata pjesë e harkut do të jetë e mbuluar me secilin shirit?
- b) A do të ketë ndonjë pjesë të harkut pa shirit? Nëse përgjigja është pozitive, atëherë sa është ajo pjesë?

Zgjidhje:

- a) Harku është sa $\frac{1}{3}$ e rrethit të plotë. Jana ka tre shirita (të kuq, të gjelbër dhe të verdhë) dhe secili prej tyre do të mbulojë gjatësi të njëjtë të harkut rrethor. Meqenëse ka tre shirita, secili do të mbulojë $\frac{1}{3}$ e harkut.
- b) Nëse secili shirit mbulon $\frac{1}{3}$ e harkut rrethor (të cilin në këtë rast e konsiderojmë si një tërësi), ndërsa kemi tre shirita, atëherë këta shirita do të mbulojnë së bashku $\frac{3}{3}$ e gjithë harkut, përkatësisht gjithë harkun rrethor. Pra, i gjithë harku rrethor do të mbulohet me shirita dhe nuk mbetet asnjë pjesë e tij e pambuluar.



Shembulli 2

Markoja dhe Ana punojnë në një projekt së bashku. Ata dëshirojnë të bëjnë një skicë interesante të një muri në shkollën e tyre duke shfrytëzuar vijë rrethore dhe disa drejtëza që do të priten në qendrën e saj. Vijën rrethore e ndajnë në tri pjesë të barabarta dhe secilën e ngjyrosin me ngjyra të ndryshme. Markoja dhe Ana kanë punuar duke ndjekur hapat në vijim:

- Markoja vizatoi vijën rrethore me qendër në pikën O.
 - Ana e lidhi pikën O me pikën A në vijën rrethore.
 - Markoja vendosi këndmatësin në qendrën O të vijës rrethore dhe gjysmëdrejtëzën që tërhoqi Ana dhe mati këndin prej 120° . Pse? Më pas tërhoqi edhe krahun e dytë të këndit dhe prerjen me vijën rrethore e shënoi me B. Mes pikave A dhe B në vijën rrethore mori pikën M.
 - Ana duke filluar nga krahu OB i këndit AOB me këndmatës mati këndin prej 120° dhe tërhoqi krahun e dytë të këndit të dytë. Pikëprerjen e krahut të dytë të këndit të dytë me vijën rrethore e shënoi me C. Mes pikave B dhe C zgjodhi pikën N.
 - Mes pikave C dhe A të vijës rrethore Markoja zgjodhi pikën P.
- a) Ashtu sikurse kanë vepruar Markoja dhe Ana, veproni ju në fletoret e juaja.
- b) A thua vija rrethore është ndarë në tri pjesë?
- c) Emërtoni harqet e fituara!
- d) Shkruani secilin kënd kulmi i të cilit është në qendrën e vijës rrethore e që i përgjigjet njërit prej harqeve $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
- d) Rishtas, në fletore, vizatoni tabelën dhe plotësoni të njëjtën.

Hark rrethor	Kënd qendror	Kordë

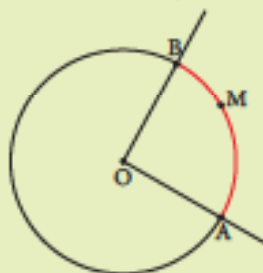
Zgjidhje:

- a) Figura që fituan Markoja dhe Ana është dhënë në vizatimin djathtas.
- b) Vija rrethore është ndarë në tre pjesë të barabarta. Shpjegoni pse.
- c) Janë fituar harqet $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
- ç) $\angle AOB$ me kulm në qendrën e vijës rrethore dhe krahët e tij e presin harkun $\widehat{AMB}$,
 $\angle BOC$ me kulm në qendrën e vijës rrethore dhe krahët e tij e presin harkun $\widehat{BNC}$,
 $\angle AOC$ me kulm në qendrën e vijës rrethore dhe krahët e tij e presin harkun $\widehat{CPA}$.



Këndi kulmi i të cilit është qendra O e vijës rrethore dhe krahët e të cilit përmbajnë rrezet e vijës rrethore quhet kënd qendror.

Çdo hark i vijës rrethore përcakton kënd të vetëm qendror mbi atë hark.



- d) Sipas shembullit, plotësoni tabelën në fletore.

Hark rrethor	Kënd qendror	Kordë
	$\angle AOB$	AB
	$\angle BOC$	
	$\angle AOC$	

Çdo kënd qendror në vijën rrethore përcakton një kordë të vetme të asaj vije rrethore.

Shembulli 3

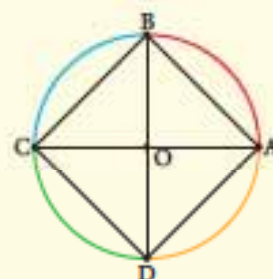
Një grup nxënësish dëshironin ta rregullojnë oborrin shkollor me lulishte të ndarë në 4 pjesë të barabarta. Që t'u ndihmoni ndiqni hapat në vijim:

- Vizatoni vijën rrethore dhe ndani atë në të katërtat. Çka vëreni në lidhje me pjesët e fituara? Çfarë këndesh qendrore janë fituar mbi secilin hark rrethor?
- Lidhni pikat fqinje, në vijën rrethore, me korda. Sa korda të tilla mund të vizatoni? A thua secilës kordë i takon një kënd në qendër? Çfarë këndi është ai?
- Zgjidhni një kordë dhe vrojtani vijën rrethore. Në sa pjesë ajo e ndan vijën rrethore? A thua secila kordë përcakton një kënd qendror? Përshkruani ato kënde. A thua korda u përgjigjet të dy harqeve rrethore? Si mund ta vërtetoni këtë lidhje?
- A mund të përfundoni se çka përcakton çdo kënd qendror në një vijë rrethore? Si është e lidhur korda me këndet qendrore që i përcakton ajo? Si mund të vërtetoni se çdo kënd qendror përcakton një hark të vetëm rrethor?

Zgjidhje:

- Secila pjesë e vijës rrethore është e barabartë sepse vija rrethore është ndarë në katër harqe të barabarta. Secili kënd qendror mbi harkun e tillë rrethor është 90° sepse këndi i plotë i vijës rrethore (360°) është ndarë në katër pjesë të barabarta.
- Mund të vizatoni katër korda të cilat fitohen me lidhjen e pikave fqinje në vijën rrethore. Secila kordë formon një kënd qendror në vijën rrethore.
- Një kordë vijën rrethore e ndan në dy harqe – njëri më i madh e tjetri më i vogël. Po, çdo kordë përcakton dy kënde qendrore. Njëri nga këndet qendrore është mbi harkun më të madh rrethor, ndërsa tjetri mbi harkun më të vogël rrethor. Korda shtrihet në njërin prej dy këndeve. Kjo mund të vërtetohet duke matur këndin që i përgjigjet harkut rrethor më të vogël mbi këtë kordë, përkatësisht këndin konveks. Pjesa tjetër e vijës rrethore mbi atë kordë, përkatësisht harku më i madh rrethor i përgjigjet këndit jokonveks i cili ka masën 360° – këndi konveks.
- Secili hark i një vije rrethore përcakton një kënd qendror unik mbi atë hark.

Korda i lidh pikat e skajshme të harkut, ndërsa këndet qendrore formohen mbi bazën e këtyre pikave të skajshme dhe qendrës së vijës rrethore.



Çdo kënd qendror i një vije rrethore përcakton një kordë unike të asaj vije rrethore.

Detyra 1

Me pikat M dhe N vija rrethore është ndarë në dy harqe rrethore, ku njëri është 7 herë më i gjatë se tjetri. Caktoni këndin qendror që i përgjigjet harkut më të shkurtër rrethor.

Detyra 2

Një vijë rrethore me pikat P dhe Q është ndarë në dy pjesë, ku njëra është $\frac{4}{9}$ e vijës rrethore. Caktoni këndin qendror i cili i përgjigjet harkut rrethor me gjatësi më të madhe.

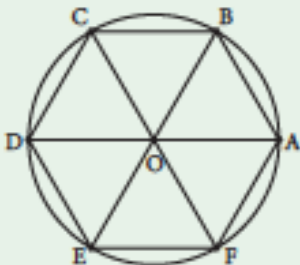
Shembulli 4

Në parkun e qytetit planifikohet të ndërtohet një ngastër rrethore për lulet. Punëtorët vendosën ta ndajnë atë në gjashtë pjesë të barabarta në mënyrë që të mbjellin lloje të ndryshme lulesh.

- Vizatoni një vijë rrethore dhe në të shënoni pikat A, B, C, D, E, F me të cilat vija rrethore është ndarë në gjashtë pjesë të barabarta.
- Vizatoni kënde qendrorë që i përgjigjen secilës nga gjashtë pjesët. Sa është secili kënd qendror?
- Nëse kordat që lidhin pikat fqinje të vijës rrethore janë të barabarta, a janë edhe harqet rrethore, lidhur me to, të barabarta? Shpjegoni.

Zgjidhje:

Shfrytëzoni vizatimin dhe përgjigjuni pyetjeve të parashtruara.

**Detyra 3**

E sata pjesë e vijës rrethore i përgjigjet këndit qendror prej:

- a) 120° b) 90° c) 240° ç) 270° d) 40°

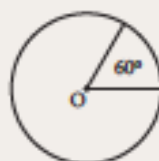
Këndet qendrorë, kordat dhe harqet rrethore, si janë të lidhura me vijën rrethore dhe si mund të ndihmojë kjo lidhje që të zgjidhim probleme nga jeta e përditshme? Nëse janë dhënë dy vija rrethore me rreze të ndryshme, a thua këndet qendrorë prej 90° i përfshijnë gjatësitë e njëjta të harqeve rrethore? Shpjegoni pse.

Përgjigjuni në fletoren tuaj pyetjeve të parashtruara. Ndani me nxënësit e tjerë përgjigjet e juaja.

- Çka mësova sot e që ishte më interesante ose më e dobishme?
- A ka situata nga jeta e vërtetë ku kam vërejtur ose ku mund të zbatoj këto koncepte gjeometrike?
- A mund të vizatoj kënd qendror me këndmatës?
- A mund të shpjegoj se si harqet rrethore dhe kordat janë të lidhura me këndet qendrore?
- Çka do të bëja ndryshe nëse përsëri zgjidh ndonjë detyrë nga kjo njësi mësimore?

Punë e pavarur

- Vizatoni vijën rrethore e cila do të përfaqësojë orën.
 - Ndani vijën rrethore në 12 pjesë të barabarta (orët).
 - Sa është masa e këndit qendror që përfshin secili nga harqet e shënuara rrethore?
 - Nëse nënvizon tri orë njëra pas tjetrës (për shembull nga 12 deri 3), sa do të jetë këndi qendror mbi ato tri orë?
 - Sa është këndi qendror që përshkon krahu i madh i orës për kohën prej 1, 2 ose 5 minuta?
- Në kopshtin me lule ngastra rrethore është ndarë në 8 pjesë të barabarta që të mbillen lloje të ndryshme lulesh.
 - Vizatoni një vijë rrethore dhe ndani atë në 8 pjesë të barabarta.
 - Sa është këndi qendror që i përgjigjet njëres pjesë të ngastrës?
 - Sa është këndi qendror që zënë dy pjesë të njëpasnjëshme?
 - Sa pjesë janë të nevojshme që të formojnë kënd qendror prej 270° ?
- Në secilën prej vijave rrethore është dhënë këndi qendror përkatës mbi një hark:



- Sa është masa e këndit qendror që mungon për të mbuluar gjithë vijën rrethore në çdonjërin nga vijat e dhëna rrethore?
- Sa pjesë të barabarta do të fitoheshin nëse vija rrethore ndahet me këndet e dhëna?

4. Në shtegun sportiv rruga rrethore është ndarë në 9 pjesë të barabarta për ushtrime.
- Vizatoni një vijë rrethore dhe ndani atë në 9 pjesë të barabarta.
 - Sa do të jetë masa e këndit qendror që i përgjigjet njëres nga pjesët?
 - Nëse vrapuesi përshkon dy pjesë, sa do të jetë këndi qendror që fitohet nga rruga e tij e kaluar?
 - Nëse vrapuesi ka përshkuar gjysmën e shtegut rrethor, atëherë sa nga pjesët ndarëse ka kaluar ai?
5. Ena rrethore është e zbukuruar me 5 lara të ndryshme përgjatë tehut të saj.
- Vizatoni një vijë rrethore dhe ndani atë në 5 pjesë të barabarta.
 - Sa është masa e këndit qendror për secilën larë?
 - Nëse dy pjesë lidhen në një larë, sa do të jetë këndi i ri qendror?

Operacione me kënde

Imagjinoni se jeni duke rregulluar ndonjë hapësirë në shtëpi ose kopsht. Për ta bërë këtë, ndoshta do të keni nevojë të matni ose llogaritni kënde, t'i mblihdhni ose zbritni për të fituar rezultate të sakta. Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si me korrektësi t'i realizoni operacionet me kënde, si t'i shndërroni masat më të vogla të këndeve dhe si këto shkathtësi t'i shfrytëzoni në jetën e përditshme.



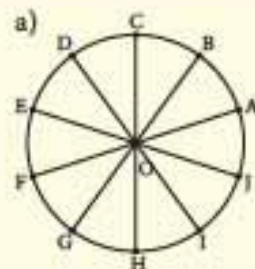
Shembulli 1

Është vizatuar një vijë rrethore që përfaqëson rrotën e mullirit. Rrota është ndarë në 10 pjesë të barabarta me rreze që lidhen në qendrën e rrotës. Në secilën pikë ku rrezja e pret rrotën, vijën rrethore, është instaluar një lopatë.

- Vizatoni vijën rrethore dhe në të shënoni rrezet që e ndajnë në 10 pjesë të barabarta.
- Sa është këndi qendror i cili i përgjigjet harkut rrethor ndërmjet dy lopatave?
- Sa është këndi qendror që e përcaktojnë dy harqe rrethore fqinje?

Zgjidhje:

- b) $360^\circ : 10 = 36^\circ$. Këndi mes dy lopatave do të jetë 36° .
- c) Nëse dëshirojmë të caktojmë çfarë këndi qendror jep harku rrethor i fituar nga dy harqe rrethore fqinje bashkërsisht, atëherë ai kënd është:
 $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$.
Pra, këndi qendror është 72° .



Detyra 1

Në vijën rrethore janë dhënë dy kënde qendrore α dhe β , ashtu që $\alpha = \beta$.

- a) Çka mund të përfundoni për kordat që u përgjigjen këtyre këndeve?
- b) Çka mund të përfundoni për harqet rrethore që u përgjigjen këtyre këndeve?
(Vizatoni një vijë rrethore, shënoni këndet qendrore dhe kordat si dhe përpikuni t'i krahasoni!)

Për matje më precize dhe për përcaktimin e masës së këndit, përveç gradës përdoren edhe njësitë në vijim: $1'$ (1 minutë) dhe $1''$ (1 sekondë).

Një gradë ka 60 minuta, ndërsa 1 minutë ka 60 sekonda.

Kjo do të thotë $1^\circ = 60' = 3600''$.

Shembulli 2

Në një sallë sporti arsimtari vendosi tre shiritat në dysheme që priten në një pikë, duke formuar kënde të ndryshme që së bashku formojnë kënd të plotë. Kërkesat e drejtuara nxënësve janë:

- a) Përdorni këndmatës për të matur secilin kënd ndërmjet shiritave dhe shkruani rezultatet në gradë.
- b) Nëse 1 gradë ka 60 minuta, atëherë sa minuta do të ketë këndi prej x° (për shembull 30°)?
- c) Nëse këndi nuk është numër i plotë, si do ta shndërronit pjesën më të vogël se grada në minuta?
- d) Nëse 1 minutë është 60 sekonda, atëherë sa sekonda do të ketë këndi prej y' (për shembull $15'$)?
- e) Nëse këndi përmban edhe sekonda edhe minuta, atëherë si shndërrohet ai vetëm në sekonda?
- dh) Nëse këndi mes shiritave është $45,5^\circ$, si do të shprehej në minuta dhe sekonda?
- e) Provoni nëse gjitha këndet e matura japin shumën prej 360° . Shpjegoni pse është kjo provë e nevojshme?

Zgjidhje:

- a) Për shembull, këndet e matura mes shiritave janë $45,5^\circ$, 90° dhe $224,5^\circ$.
- b) Shndërrimi i gradëve në minuta: Për $45^\circ = (45 \cdot 60)' = 2700'$.
- c) Për shembull për: $45,5^\circ$, nga detyra nën b) kemi $45^\circ = 2700'$.
Mbetja, përkatësisht pjesa dhjetore $0,5^\circ$ shndërrohet në minuta: $0,5^\circ = (0,5 \cdot 60)' = 30'$.
Domethënë, $45,5^\circ = 45^\circ 30'$, përkatësisht gjithsej $2700' + 30' = 2730'$.

- c) Shndërrimi i minutave në sekonda: Për shembull për $30' = (30 \cdot 60)'' = 1800''$.
- d) $45^\circ 30' = (45 \cdot 3600 + 30 \cdot 60)'' = 163800''$
- dh) Domethënë, $45,5^\circ = 45^\circ 30' 0''$.
- e) Shuma e këndeve të matur është: $45,5^\circ + 90^\circ + 224,5^\circ = 360^\circ$. Fituam përgjigje aprovuese; shumën e këndeve është e saktë, sepse tre këndet ashtu sikurse ishte kërkuar në detyrë duhej të formonin kënd të plotë.

Shembulli 3

Një grup nxënësish dëshiron të dizajnojnë një flamur të ri shkollor. Ata vendosën që flamuri në fushën e tij të ketë dy trekëndësha me ngjyra të ndryshme. Trekëndëshat kanë kënde me masë $65^\circ 20'$ dhe $72^\circ 40'$. Njehsoni këndin e tretë të brendshëm të trekëndëshit.

Zgjidhje:

Mbledhja e dy këndeve të dhëna jep shumën: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' = (65^\circ + 72^\circ) + (20' + 40')$.

Mblidhni gradët:

$$65^\circ + 72^\circ = 137^\circ.$$

Mblidhni minutat:

$$20' + 40' = 60'.$$

$60'$ është 1° : pra $137^\circ + 1^\circ = 138^\circ$.

Njehsimi i këndit të tretë: Nga këndi 180° zbrisim shumën e sipërme të dy këndeve përkatësisht

$$180^\circ - 138^\circ = 42^\circ.$$

Prova: Shuma e këndeve të brendshme është: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' + 42^\circ = 180^\circ$.

Shembulli 4

Jepen këndet $\alpha = 103^\circ 17' 34''$ dhe $\beta = 48^\circ 46' 38''$. Njehsoni:

- a) $\alpha + \beta$ b) $\alpha - \beta$

Zgjidhje:

a) $103^\circ 17' 34''$

$$+ 48^\circ 46' 38''$$

$$151^\circ 63' 72''$$

$$151^\circ 64' 12''$$

$$152^\circ 4' 12''$$

Ngjashëm sikurse gjatë mbledhjes së numrave të emëruar, edhe këtu operacionet kryhen nga djathtas majtas. Në shumën e fituar duhet të bëjmë korrigjime duke shfrytëzuar lidhjet mes njëjësive matëse për këndet, $72'' = 60'' + 12'' = 1' 12''$, $63' + 1' = 64'$, $64' = 1^\circ 4'$.

Kështu fitojmë $\alpha + \beta = 151^{\circ} 63' 72'' = 152^{\circ} 4' 12''$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 103^{\circ} 17' 34'' \\ - 48^{\circ} 46' 38'' \\ \hline \end{array}$$

Meqenëse nga $34''$ duhet të zbrisim $38''$, atëherë nga $17'$ marrim $1' = 60''$ dhe, kështu, për sekondat kemi $34'' + 60'' = 94''$; ngjashëm edhe te minutat: tani nga $16'$ minuta duhet të zbrisim $46'$, prandaj marrim $1^{\circ} = 60'$ të 103° dhe te minutat fitojmë $16' + 60' = 76'$, ndërsa te gradët mbeten 102° . Atëherë, ndryshimi do të llogaritet me sa vijon:

$$\begin{array}{r} 102^{\circ} 76' 94'' \\ 103^{\circ} 17' 34'' \\ - 48^{\circ} 46' 38'' \\ \hline 54^{\circ} 30' 56'' \end{array}$$

Përfundimisht fitojmë $\alpha - \beta = 54^{\circ} 30' 56''$.

Detyra 2

Njehsoni: a) $25^{\circ} 40' 30'' + 30^{\circ} 25' 45''$ b) $22^{\circ} 35' 50'' - 18^{\circ} 20' 55''$

Shembulli 5

Inxhinierët që dizajnojnë panele diellore duhet të caktojnë këndet për vendosje të paneleve që të njëjtët të mund të shfrytëzojnë optimalisht dritën diellore. Një panel zë kënd prej $47^{\circ} 30'$ me bazën e rrafshët, e tjetri panel duhet të vendoset asisoj që këndi i përgjithshëm që zënë panelet me bazën të jetë $110^{\circ} 15'$.

- a) Sa është këndi që paneli i dytë zë me bazën?
b) Nëse panelit të dytë duhet t'i rritet akoma pjerrësia për $5^{\circ} 20'$, atëherë sa do të jetë këndi i ri i panelit të dytë?

Zgjidhje:

- a) Llogaritja e këndit të panelit të dytë: Këndi i përgjithshëm i dy paneleve kundrejt bazës është $110^{\circ} 15'$. Paneli i parë zë kënd prej $47^{\circ} 30'$. Nga këndi i përgjithshëm zbrisim këndin që formon paneli i parë me bazën: $110^{\circ} 15' - 47^{\circ} 30' = 62^{\circ} 45'$ (Këndi i panelit të dytë).
b) Njehsimi i këndit të ri të panelit të dytë: Paneli i dytë rrit pjerrësinë për $5^{\circ} 20'$. Këndit fillestar të panelit të dytë i shtojmë këtë kënd dhe kemi: $62^{\circ} 45' + 5^{\circ} 20' = 68^{\circ} 05'$ (këndi i ri i panelit të dytë).

Detyra 3

Inxhinierët që punojnë në dizajnimin e sistemit të ri të kulmit për një fabrikë duhet të caktojnë këndet e pjesëve të kulmit me qëllim arritjen e stabilitetit dhe efikasitetit maksimal. Një nga elementet kryesore të konstruksionit është trau bartës i cili zë kënd $48^{\circ} 45'$ me bazën e sheshtë të kulmit. Për të shmangur mbingarkimin e strukturës, trau i dytë duhet të formojë kënd $120^{\circ} 30'$ me traun bartës.

- a) Sa është këndi mes traut të dytë dhe bazës së sheshtë të kulmit? Si do ta njehsoni këtë kënd, nëse e dini se shuma e këndeve mes trarëve bartës dhe bazës së sheshtë të kulmit duhet të jetë 180° .



- b) Nëse trau i dytë duhet të vendoset nën kënd që është për $5^\circ 15'$ më i madh se këndi i matur paraprak, sa do të jetë këndi i ri ndërmjet traut të dytë dhe bazës së kulmit? Si do ta provoni saktësinë e ndryshimit të këndit?

Si do të ndikojë ndryshimi i këndeve në konstruksionin e kulmit në stabilitetin e gjithë strukturës? Çka do të ndodh nëse këndet rriten ose zvogëlohen tej mase, dhe si do të zgjidhej kjo situatë gjatë projektimit të elementeve të tjera arkitektonike? Hulumtoni!

Përgjigjuni pyetjeve në fletore. Përgjigjen e çdo pyetjeje mbështetni në shembuj.

- A mund sipas rregullave t'i shndërroj këndet nga njësi matëse më të mëdha në njësi matëse më të vogla dhe anasjelltas?
- A mund t'i mbledh dhe zbres këndet?
- A mund t'i zbatoj këto operacione në situata nga përditshmëria?

Punë e pavarur

- Njehsoni $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ nëse:
 - $\alpha = 82^\circ 17'$, $\beta = 53^\circ 37' 46''$, b) $\alpha = 183^\circ 15' 47''$, $\beta = 98^\circ 4' 52''$
 - $\alpha = 205^\circ$, $\beta = 118^\circ 53' 26''$
- Duke lëvizur rrugës, një automobil duhet të kaloj tri kthesa. Kthesës së parë i përgjigjet këndi prej $35^\circ 45' 30''$, kthesës së dytë i përgjigjet këndi $72^\circ 10' 15''$, ndërsa kthesës së tretë këndi prej $58^\circ 25' 45''$.
 - Njehsoni këndin e përgjithshëm të kthesave që i kalon automobili.
 - Nëse automobili duhet të bëj edhe një kthesë me kënd prej $12^\circ 50' 30''$, sa do të jetë këndi i përgjithshëm i ri?
- Jepen këndet $\alpha = 103^\circ 16' 33''$ dhe $\beta = 61^\circ 47' 37''$. Njehsoni: a) $\alpha + \beta$ b) $\alpha - \beta$
- Le të jenë $\alpha = 79^\circ 57' 43''$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 27^\circ 19'$. Njehsoni: a) $\alpha + \beta + \gamma$ b) $\beta - \gamma$
- Caktoni këndin α nëse $\beta + \gamma = 111^\circ 43'$ dhe $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
- Këndi $\alpha = 2 \cdot \beta$, $\beta = 35^\circ 35'$ dhe $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Sa janë këndet α dhe γ ?

Mbledhja dhe zbritja grafike e këndeve

Në arkitekturë, dizajn, e madje edhe në përditshmëri shpesh na duhet të konstruktojmë kënde me precizitet. Për shembull, gjatë prodhimit të mobileve ose dizajnit të objekteve, mund të përballemi me kërkesën për ndërtimin e një këndi me përmasat e sakta të një këndi tjetër ekzistues. Në këtë njësi mësimore do të mësojmë si të konstruktojmë kënd në përmasat e një këndi të dhënë duke përdorur kompas dhe vizore dhe si ta zbatosh këtë gjatë mbledhjes dhe zbritjes së këndeve me vegla gjeometrike gjatë zgjidhjes së detyrave.



Shembulli 1

Në fletore vizatoni kënd të barabartë me këndin e dhënë në vizatimin djathtas. Si do ta bënit këtë?



Shembulli 2

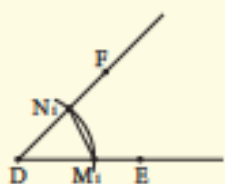
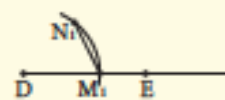
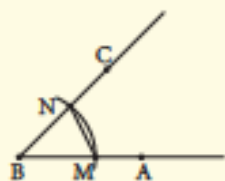
Bartja grafike e këndit të barabartë me një kënd të dhënë.

Zgjidhje:

Ndiqui hapat e mëposhtëm dhe vizatoni në fletoret e juaja.

- Vizatoni $\angle ABC$.
- Vizatoni gjysmëdrejtëzën DE .
- Vendosni gjilpërën e kompasit në kulmin e $\angle ABC$ dhe tërhiq harkun që i pret krahët e këndit në pikat M dhe N .
- Me hapjen e njëjtë të kompasit bëni hark rrethor me qendër në pikën D . Prerjen e gjysmëdrejtëzës me fillim në pikën D dhe harkut shënoni me M_1 .
- Matni gjatësinë e kordës që i përgjigjet harkut rrethor që keni vizatuar te $\angle ABC$, përkatësisht MN .
- Me hapjen e njëjtë të kompasit bartni këtë gjatësi duke e vënë gjilpërën e kompasit në pikën M_1 . Prerjen e dy harqeve shënoni me N_1 .
- Tërhiqni krahun e dytë të këndit të kërkuar, përkatësisht DN_1 (F është pikë në gjysmëdrejtëzën DN_1). Këndi i fituar $\angle EDF$ është i barabartë me $\angle ABC$.

Përpikuni të jepni përgjigje në pyetjen vijuese: Cila veti e këndit qendror përdoret gjatë procedurës së bartjes grafike të këndit?



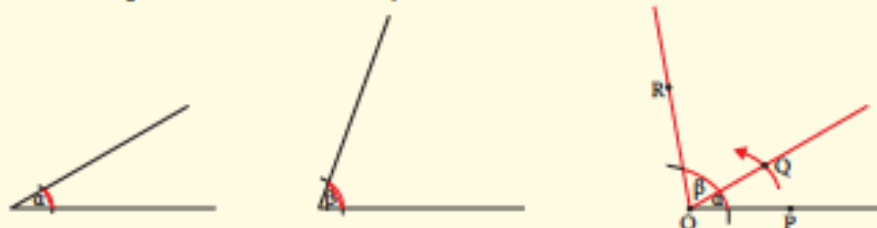
Shembulli 3

Në fletore vizatoni dy kënde α dhe β . Më pas ndiqni hapat e mëposhtëm për t'i mbledhur grafikisht këndet α dhe β .

Zgjidhje:

Hapat:

- Konstruktioni këndin $\angle POQ$ të barabartë me këndin α , sipas hapave në Shembullin 2.
- Krahu i dytë i këndit $\angle POQ$, OQ , do të jetë krahu i parë për këndin që do ta konstruktosh të barabartë me këndin β kulmi i të cilit gjithashtu do të jetë pika O .
- Krahu i dytë i këndit të barabartë me këndin β le të jetë i shënuar me OR .
- Këndi i sapo fituar $\angle POR = \alpha + \beta$.



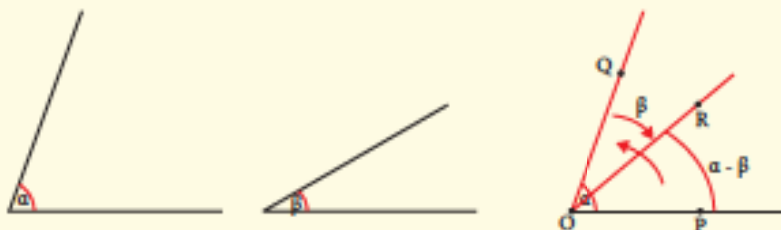
Shembulli 4

Vizatoni në fletore dy kënde α dhe β , ku $\alpha > \beta$. Më pas ndiqni hapat për të zbritur këndin β nga këndi α me anë të kompasit.

Zgjidhje:

Hapat:

- Fillimisht, duke ndjekur procedurën në shembullin 2, grafikisht e bartim këndin α (në kah të kundërt nga kahu i lëvizjes së akrepave të orës).
- Këndin e fituar, që është i barabartë me α , le ta shënojmë me $\angle POQ$.
- Këndin β e bartim grafikisht, kështu që nëse për krahu fillestar e marrim OQ , në kahun e lëvizjes së akrepave të orës e bartim β , përkatësisht $\beta = \angle QOR$.
- Këndi i përcaktuar me krahet OR dhe OP , përkatësisht $\angle POR = \alpha - \beta$.



Detyra 1

Vizatoni këndin $\alpha = 35^\circ$ dhe $\beta = 105^\circ$. Konstruktioni këndet: $\gamma = \alpha + \beta$ dhe $\delta = \alpha - \beta$.

Shembulli 5

Kapiteni i një anije të vogël duhet ta drejtojë atë nëpër një kanal. Për këtë arsye duhet të bëj dy kthesa. Fillimisht, duhet të kthehet për kënd 65° djathtas, e më pas për këndin 40° majtas. Në fund të rrugës kapiteni dëshiron të provojë kahen e saktë në lidhje me kahjen fillestare. Sa është këndi përfundimtar i kthesës?

Zgjidhje:

Nga kushti i detyrës kthesa e parë është 65° djathtas, ndërsa kthesa e dytë është 40° majtas. Këndi i përgjithshëm i kthesës do të gjendet duke zbritur këndet. Shpjegoni pse? Me llogaritje fitojmë: $65^\circ - 40^\circ = 25^\circ$.

Pra, këndi i përgjithshëm i kthesës do të jetë 25° djathtas kundrejt kahes fillestare.

Zgjidhja grafike:

- Vizatoni këndin 65° dhe këndin 40° .
- Tërhiqni një drejtëz AB që do të përfaqësojë drejtimin fillestar të anijes. Zgjidhni pikën O në drejtëzën AB.
- Bartni këndin 65° me kulm në pikën O djathtas drejtëzës AB dhe shënoni me $\angle XOY$. ($X \in AB$).
- Bartni këndin e dytë 40° majtas, duke filluar me krahun OY.
- Vizatoni gjysmëdrejtëzën OZ.
- Matni këndin mes drejtimin fillestar AB (OX) dhe drejtimin përfundimtar të anijes OZ.
- Ky kënd është 25° , çka nënkupton se anija ka përfunduar 25° më në të djathtë nga drejtimi fillestar.

Detyra 2

Një inxhinier trafiku rregullon trotuarin me shtigje që kryqëzohen. Njëri shteg me trotuarin zë kënd prej 75° , ndërsa shtegu tjetër duhet të vendoset nën ndonjë kënd, ashtu që bashkë me shtegun e parë të formojnë kënd të drejtë. Inxhinieri dëshiron të dijë:

- Nën çfarë këndi ndaj shtegut të parë duhet të vendoset shtegu i dytë, ashtu që ai të formojë kënd të drejtë me trotuarin?
- Më pas, nëse duhet të shtohet shtegu i tretë nga ana tjetër e trotuarit nën kënd 30° me trotuarin, sa është këndi mes shtegut të parë dhe të tretë, si dhe mes shtegut të tretë dhe të dytë?

Imagjinoni se planifikoni një shteg në kopsh me formë trekëndëshi me njërin kënd të brendshëm 90° , ndërsa dy këndet tjera duhet të jenë të barabartë. Si do t'i konstruktonit këto kënde ashtu që shtegu të jetë si duhet?

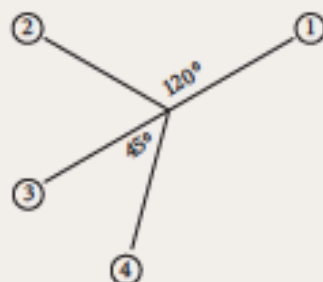
Përgjigjuni në fletoret e juaja pyetjeve në vijim. Nëse për përgjigjen e ndonjë pyetjeje nuk jeni të sigurt, përsëritni shembullin e dhënë në këtë njësi mësimore e që ka të bëjë me pyetjen.

- Mund të konstruktoj kënd të njëjtë me këndin e dhënë?
- Mund të konstruktoj shumën dhe ndryshimin e këndeve të dhëna?
- Mund t'i përdor këto shkathtësi për zgjidhje detyrash nga jeta reale?

Punë e pavarur

Gjeni zgjidhje grafike.

- Një inxhinier projekton një udhëkryq trafiku me katër rrugë që priten në një pikë sikurse e tregon vizatimi djathtas. Rruga e parë dhe e dyta priten në kënd 120° , ndërsa e treta dhe e katërta në kënd 45° .
 - Konstruktoni këndin që zënë rruga e dytë dhe e tretë, nëse rruga e parë dhe e tretë formojnë kënd të shtrirë.
 - Konstruktoni shumën e tre këndeve (mes rrugës së parë dhe të dytë, të dytë dhe të tretë, të tretë dhe të katërt).
 - Konstruktoni këndin që zënë rruga e parë dhe e katërt.
- Një marangoz ndërton kornizën e një tavoline në formë trekëndëshi. Njëri kënd i kornizës është 88° . Me konstruktim përgjigjuni pyetjeve:
 - Sa është shuma e dy këndeve të tjera?
 - Nëse njëri prej tyre është 62° , sa është këndi i tretë?
- Një teknik vendos panele diellore mbi një kulm. Panelet duhet të zënë kënd 35° me horizontalen. Më pas, tekniku zbulon se duhet të rrit pjerrësinë edhe për 12° që paneli optimalisht të jetë ekspozuar dritës diellore. Me konstruktim jepni përgjigje në këto pyetje:
 - Sa do të jetë këndi përfundimtar i pjerrësisë së panelit?
 - Nëse dëshiron që të ul pjerrësinë për 8° , sa do të jetë këndi përfundimtar?
- Vera në oborrin e shtëpisë së saj krijon një ngastër për lule e cila ka formën e një katërkëndëshi. Këndi i parë i ngastrës është 110° , këndi i dytë 95° , ndërsa i treti 85° .
 - Me konstruktim, caktoni këndin e katërt, duke ditur se shuma e këndeve të brendshme të katërkëndëshit është 360° .
 - Nëse Vera vendos këndin e tretë ta zvogëlojë për 10° , si do të ndikojë kjo në madhësinë e këndit të katërt?
- Konstruktoni këndin që do të ishte ndryshim i këndeve 150° dhe 60° .
- Jepen këndet: $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 87^\circ$ dhe $\gamma = 35^\circ$. Konstruktoni këndin
 - $\alpha + \beta - \gamma$
 - $\alpha - \beta + \gamma$
- Vizatoni një kënd të gjerë dhe një kënd të ngushtë. Me konstruktim, caktoni ndryshimin e tyre.



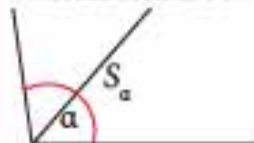
Konstruktimi i simetrales së këndit dhe këndeve 60° , 30° , 15° , 90° , 45°

Këndet 60° , 30° , 15° , 90° dhe 45° janë shpesh të pranishëm në shumë disiplina, sikurse është arkitektura, projektimi, inxhinieria dhe aktivitetet e përditshme. Ato janë të rëndësishëm për ndërtimin e objekteve precize dhe të rregullta, si dhe përdoren për zgjidhjen e problemeve matematikore dhe detyrat gjeometrike. Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si t'i konstruktoni këto kënde duke përdorur vegla të thjeshta, siç janë kompasi dhe vizorja.



Shembulli 1

Vizatoni këndin 98° . Me këndmatës dhe vizore vizatoni simetralen (përgjysmoren) e këndit.



Shembulli 2

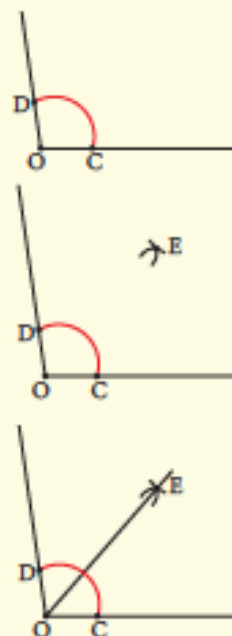
Konstruktoni simetralen e këndit 108° .

Zgjidhje:

Ndiqni hapat dhe vizatoni në fletore.

Hapat për konstruktimin e simetrales së këndit 108° me kompasi:

- Me ndihmën e këndmatësit, vizatoni këndin 108° . Kulmin e tij shënoni me O.
 - Majën e kompasit vendosni në pikën O (kulmin e këndit).
 - Me rreze të çfarëdoshme (hapje të kompasit sipas dëshirës) vizatoni hark që i pret krahët e këndit në pikat C dhe D, përkatësisht.
 - Majën e kompasit vendosni në pikën C, përshtatni hapjen e kompasit që të jetë pak më e madhe se gjysma e distancës ndërmjet C dhe D.
 - Vizatoni një hark në brendinë e këndit.
 - Pa ndryshuar hapjen e kompasit, vendosni majën e tij në pikën D dhe vizatoni një hark tjetër i cili do ta pret harkun e parë. Pikën e prerjes të harqeve shënoni me E.
 - Me ndihmën e vizores lidhni kulmin O me pikën E.
- Gjysmëdrejtëza OE është simetralja e këndit 108° . Prova:
- Me këndmatës matni të dy këndet që i ndërton simetralja (OE) me krahët OA dhe OB. Duhet të jenë të barabartë, përkatësisht 54° secili.



Detyra 1

Vizatoni këndin 180° . Konstruktioni simetralen e tij. Nga sa gradë do të jetë secili nga këndet që do t'i formojë simetralja?

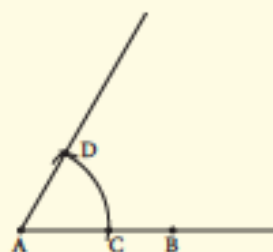
Shembulli 2

Konstruktimi i këndit 60° .

Zgjidhje:

Në fletore vizatoni duke ndjekur hapat e konstruktimit, me kompas, të këndit 60° :

- Me vizore vizatoni gjysmëdrejtëzën AB.
- Majën e kompasit vendosni në pikën A.
- Zgjidhni një rreze çfarëdo (hapje jo shumë të madhe të kompasit) dhe vizatoni një hark që do ta pret gjysmëdrejtëzën AB. Shënoni me C pikën e prerjes së harkut me gjysmëdrejtëzën.
- Pa ndryshuar rrezen e kompasit (hapjen e tij), vendosni majën e tij në pikën C.
- Vizatoni hark të ri që e pret harkun e parë. Shënoni me D pikën e prerjes së dy harqeve.



Me vizore vizatoni gjysmëdrejtëzën AD. Kjo gjysmëdrejtëz është krahu i dytë i këndit.

Këndi $\angle BAD$ që e formojnë krahët AB dhe AD është kënd prej 60° .

*A mund të shpjegoni pse gjatë këtij konstruktimi këndi i fituar është pikërisht këndi 60° ?

Detyra 2

Dituritë për konstruktimin e këndit 60° dhe simetrales së këndit përdorni për të konstruktuar këndin prej 30° dhe këndit prej 15° .

Shembulli 3

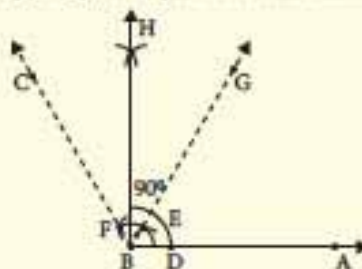
Konstruktioni këndin prej 90° .

Zgjidhje:

Hapat e konstruktimit, me kompas, të këndit 90° :

- Me vizore vizatoni gjysmëdrejtëzën BA. Pika B do të jetë kulm i këndit që do të konstruktioni.
- Vendosni majën e kompasit në pikën B dhe zgjidhni një rreze çfarëdo (hapni kompasin sipas dëshirës).
- Me kompas vizatoni hark rrethor me qendër në B i cili do ta pret gjysmëdrejtëzën BA në pikën D.
- Pa ndryshuar rrezen e kompasit, vendosni majën e tij në pikën D dhe vizatoni një hark që do ta pret harkun paraparak në pikën E.
- Me rrezen e njëjtë të kompasit, vendosni majën e kompasit në pikën E dhe vizatoni hark që e pret harkun e parë për herë të dytë (në pikën F).

- Me vizore lidhni pikën B me pikën E, e më pas pikën B me pikën F.
- $\angle ABF$ është kënd 120° . Shpjegoni!
Cili është hapi i fundit për të fituar këndin 90° (përkatësisht $\angle ABH$)? Që të përgjigjeni kësaj pyetjeje, rikujtoni konstruktimin e simetrales së këndit.

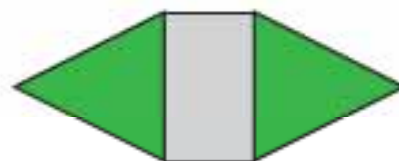


Detyra 3

Përdorni konstruktimin e këndit 90° për të konstruktuar këndin 45° .

Shembulli 4

Mateo është nxënës i cili dëshiron të projektojë një kornizë për figurën që do ta bëjë në punëtorinë shkollore. Korniza duhet të ketë dy lloje këndesh: kënde prej 90° për kornizën dhe kënde 60° për elementet dekoruese të kornizës, sikurse në vizatimin e dhënë.



Zgjidhje:

Mateo ka kompas dhe vizore. Përdorni hapat për konstruktimin e këndeve 90° dhe 60° që t'i ndihmoni Mateos t'i ndërtojë këndet e kornizës. Hapat:

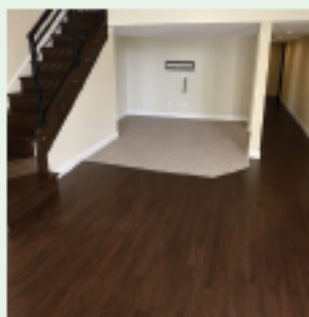
- Me ndihmën e kompasit dhe vizores Mateo do të konstruktojë katër kënde 90° që të formojë kornizën drejtkëndore.
- Për këndet e dekorimit, Mateo do të ndjekë hapat e konstruktimit të këndit 60° , duke ndërtuar një trekëndësh barabrinjës (gjitha këndet e brendshme të tij janë me nga 60°).
- Mateo do t'i vendos këndet prej 60° në dy anët paralele të kornizës.
- Mateo do të provojë nëse këndet janë ndërtuar me saktësi përmes këndmatësit, respektivisht këndet e kornizës a janë 90° dhe ato të dekorimit a janë 60° .

Detyra 4

Është dhënë drejtëza dhe pika A në të. Me kulm në pikën A, konstruktoni këndin që paraqet shumën e këndeve 45° dhe 30° duke përdorur hapat e konstruktimit të secilit prej këndeve.

- Sa është këndi i fituar?
- Sa është këndi shtues i këndit të gjetur nën a)?

Si mund të ndikojnë, të kuptuarit e drejtë dhe zbatimi i metodave të konstruktimit të këndeve specifike, në zgjidhjen e problemeve gjeometrike dhe në zbatimin në jetën e zakonshme të principeve gjeometrike? Shfrytëzoni fotografitë më poshtë për të dhënë përgjigjen.

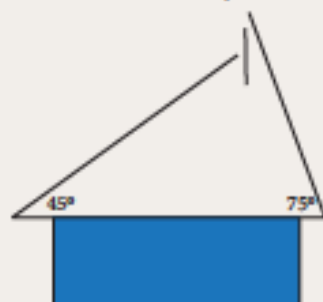


Përgjigjet e pyetjeve shkruani në fletore. Për konstruktimin e disa këndeve, nëse ka nevojë kthehuni te shembujt e njësisë mësimore.

- A mund të konstruktoj kënde prej 60° , 30° , 15° , 90° dhe 45° ?
- A mund këto kënde t'i zbatoj në situata të ndryshme praktike?
- A i përdor si duhet veglat (kompasin dhe vizoren) për konstruktimin e saktë të këndeve?

Punë e pavarur

- 1.* Konstruktoni kënd prej 60° , e më pas me kompas dhe vizore ndani këndin në dy pjesë, ashtu që njëra të jetë 3 herë më e madhe se tjetra.
2. Projekti për ndërtimin e kulmit të shtëpisë parasheh pjerrësi prej 75° në raport me rrafshin horizontal në njërën anë, ndërsa në tjetrën anë pjerrësi me kënd 45° . Vendosni, me konstruktim, të dy këndet. Për ndihmë u është dhënë skica e pamjes së kulmit nga anash.



3. Konstruktioni këndin prej:

- a) 150° b) 135° c) 210° ç) $37^\circ 30'$

4. Ndërtimi i një zgjidhjeje trafiku për një mbikallim të madh kërkon konstruktimin e këndeve prej 105° dhe 45° . Bëni këtë në fletore dhe shkruani hapat e konstruktimit.



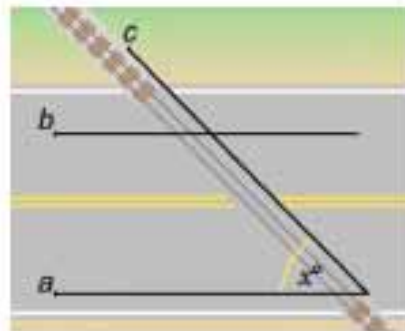
5. Teknologjia dhe veglat softuerike janë aleatë të shkëlqyer në mësimdhënie sepse ofrojnë alternativa dinamike kundrejt vizatimit tradicional manual. Softuerët si GeoGebra, Geometer's Sketchpad dhe të tjerë të ngjashëm me këto, mundësojnë ndërveprim dinamik me objektet gjeometrike dhe e bëjnë matematikën më të kuptueshme dhe më të afërt me jetën reale.

Detyrë:

Hulumtoni me anë të ndonjë softueri për gjeometri vizatimin e këndeve me madhësi të dhënë dhe përcaktimin e simetraleve të tyre. Aplikacionet e ndryshme ofrojnë vegla dhe mundësi të ndryshme, por gjithsesi ofrojnë qasje të shpejtë, interesante dhe interaktive gjatë zgjidhjes së problemeve matematikore.

Transversalet dhe drejtëzat paralele

Në këtë njësi do të hulumtoni transversalet dhe drejtëzat paralele, dy koncepte tepër të rëndësishme në gjeometri që kanë zbatim të gjerë në përditshmëri, sikurse janë planet e rrugëve ose planet inxhinierike. Përmes të kuptuarit të këndeve që formohen në transversale dhe drejtëzat paralele, do të njiheni me problemet që zgjidhen gjatë projektimit dhe ndërtimit të strukturave të ndryshme.



Shembulli 1

Andrea dhe Petri luajnë në plazh. Andrea vizatoi dy vija në rërë që priten me njëra-tjetrën. Petri ka për detyrë të përcaktojë se cilat kënde janë fqinj, shtues dhe të kundërt në kulm.

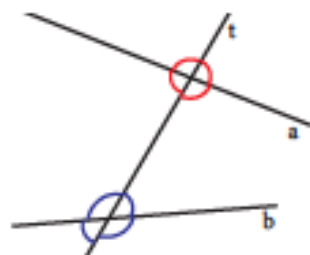
Zgjidhje:

- Në këtë rast këndet $\angle 1$ dhe $\angle 2$ janë kënde fqinj. Shpjegoni pse.
- Kënde shtues janë, gjithashtu, $\angle 1$ dhe $\angle 2$, $\angle 3$ dhe $\angle 4$, $\angle 3$ dhe $\angle 2$, $\angle 1$ dhe $\angle 4$. Shpjegoni pse.
- Kënde të kundërta në kulm janë këndet: $\angle 1$ dhe $\angle 3$, $\angle 4$ dhe $\angle 2$. Shpjegoni pse.



Shembulli 2

- Shpjegoni vizatimin.
- Sa kënde janë formuar?
- Shqyrtoni këndet që i formojnë drejtëza t dhe drejtëzat a dhe b ?

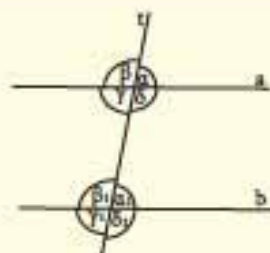


Zgjidhje:

- Transversalja është drejtëz e cila pret dy ose më shumë drejtëza në pika të ndryshme, përkatëse. Prerjet e drejtëzave formojnë kënde të ndryshme.
- Me transversale formohen 8 kënde, nga katër në secilën drejtëz.

c) Llojet e këndeve që formohen nga transversalja:

- Kënde të brendshëm: Kënde që gjenden ndërmjet drejtëzave dhe transversales. Cilët janë ato kënde?
- Kënde të jashtëm: kënde që gjenden jashtë drejtëzave, në anën e kundërt me këndet e brendshme. Cilët janë ato kënde?



Kënde përgjegjëse i quajmë ato çifte këndesh që:

- nuk kanë kulm të përbashkët
- shtrihen në anë të njëjtë të transversales
- njëri është i brendshëm, ndërsa tjetri i jashtëm

Në shembullin tonë, kënde përgjegjës janë çiftet në vijim: α dhe α_1 ; β dhe β_1 ; γ dhe γ_1 ; δ dhe δ_1 .

Kënde ndërrues i quajmë çiftet e këndeve që:

- nuk kanë kulm të përbashkët
- shtrihen në anë të ndryshme të transversales
- të dy janë të brendshëm ose të dy janë të jashtëm

Në shembullin tonë, kënde ndërruese janë çiftet e këndeve: α dhe γ_1 ; β dhe δ_1 ; δ dhe β_1 ; γ dhe α_1 .

Kënde të njëanshëm i quajmë këndet që:

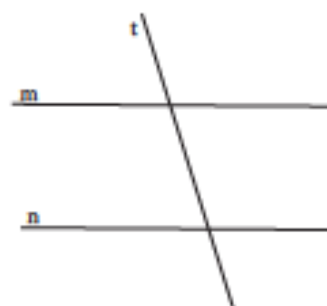
- nuk kanë kulm të përbashkët
- shtrihen në anë të njëjtë të transversales
- të dy janë kënde të brendshme ose të dy janë kënde të jashtme

Në shembullin tonë kënde të njëanshëm janë çiftet e këndeve: α dhe δ_1 ; β dhe γ_1 ; γ dhe β_1 ; δ dhe α_1 .

Detyra 1

Në vizatim drejtëzat paralele m dhe n priten me transversalen t (transversale e drejtëzave paralele). Rishtas vizatoni këtë vizatim në fletore dhe shënoni këndet në vijim:

- Këndet e brendshme,
- Përzgjidh dy çifte këndesh ndërrues, shqyrtoni në cilën anë të transversales gjenden dhe a janë të jashtëm ose të brendshëm.
- Përzgjidh dy çifte të këndeve të njëanshëm, shpjegoni në cilën anë të transversales gjenden dhe a janë të brendshëm ose të jashtëm.



Nëse drejtëzat a dhe b janë paralele dhe t është transversale, atëherë:

Këndet përgjegjës janë të barabartë



Këndet ndërrues janë të barabartë

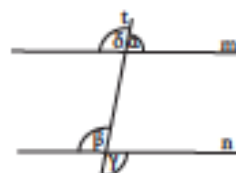


Këndet e njëanshëm janë shtues



Detyra 2

Klasifikoni këndet e shënuara me shkronja në vizatim dhe shpjegoni përgjigjen tuaj. Në vizatimin e dhënë $m \parallel n$ dhe $\alpha = 67^\circ$. Njihsoni këndet β , γ dhe δ .

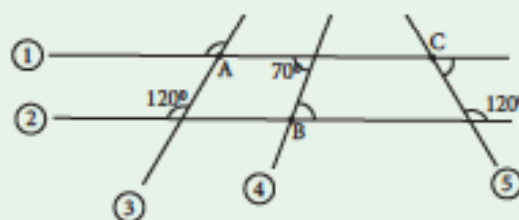


Shembulli 3

Përpiloni një zgjidhje për një projekt trafiku që përfshin dy rrugë kryesore paralele dhe tri rrugë anësore që i presin dy rrugët e para. Rrugët dhe disa pika të prerjes janë dhënë në vizatim. Njihsoni këndet në pikat e shënuara dhe shpjegoni se si lidhjet mes tyre do të shfrytëzoheshin në probleme reale.

Zgjidhje:

$\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Shpjegoni pse. Hulumtoni se si këndet ndikojnë në lidhje me: sigurinë në rrugë, ndërtimet në infrastrukturë, navigacion dhe orientim, si dhe në analizat ekonomike.



Detyra 3

Një inxhinier punon në projektimin e një parku që përmban:

- Dy gardhe paralele që e kufizojnë hapësirën e parkut (drejtëzat paralele a dhe b).
 - Tre shtigje që e presin parkun dhe lidhen me gardhet nën kënde të ndryshme (transversalet t_1 , t_2 dhe t_3).
- a) Caktoni sa kënde do të formohen gjatë prerje së shtigjeve t_1 , t_2 dhe t_3 me gardhet paralele a dhe b .
 - b) Përdorni konceptet kënde të brendshme, të jashtme, përgjegjës, ndërrues dhe të njëanshëm për të shpjeguar këndet që janë formuar.
 - c) Shkruani nga një çift nga secili lloj i këndeve në transversalet t_1 , t_2 dhe t_3 .

Imagjinoni një situatë në të cilën dy rrugë paralele priten me një drejtëz normale (pingule) në to. Çfarë këndesh formohen me drejtëzën prerëse?

Vizatoni, në fletore, dy drejtëza paralele dhe një transversale. Përgjigjuni pyetjeve, duke përdorur vizatimin që keni bërë.

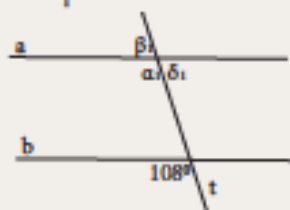
- A bëj dallimin ndërmjet këndeve që formohen mes transversales dhe drejtëzave paralele?
- A mund të njehsoj këndet e panjohura kur kam të dhënë një kënd në pikën prerëse të transversales me drejtëzat paralele?
- Si mund t'i zbatojmë këto koncepte në planifikime inxhinierike dhe të rrugëve?

Punë e pavarur

1. Dy drejtëza paralele a dhe b priten me transversalen t , ku njëri nga këndet e brendshme është 65° .
 - a) Shënoni gjitha këndet tjera që formohen.
 - b) Identifikoni cilat kënde janë të brendshme, të jashtme, ndërrues, të njëanshëm dhe përgjegjës.
 - c) Klasifikoni gjitha këndet e formuara.
2. Një inxhinier projekton një urë e cila me lumin formon këndin prej 75° , por ura i pret edhe brigjet paralele të lumit.
 - a) Identifikoni këndet ndërrues dhe ato përgjegjës.
 - b) Njehsoni gjitha këndet që formohen mes urës dhe brigjeve.
3. Në planin urbanistik, dy rrugë paralele a dhe b priten me një rrugë të tretë si transversale, le të themi t . Gjatë matjes një kënd me kulm në pikën prerëse të njërës prej rrugëve a ose b me transversalen është 45° . Njehsoni gjitha këndet në atë pikëprerje.
4. Në vizatim $m \parallel n$ dhe δ është 5 herë më i vogël se α . Gjeni këndet α dhe δ .



5. Drejtëzat paralele a ose b priten me drejtëzën t . Njëri nga këndet është 108° . Njehsoni këndet δ , β , dhe α !



Shumëkëndëshat konveks dhe jokonveks

Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si t'i dalloni shumëkëndëshat konveks nga ata jokonveks. Këto forma gjeometrike janë bazë për mësimin e mëtejshëm të gjeometrisë. Të kuptuarit e drejtë të karakteristikave të tyre është e një rëndësie të veçantë për mënyrën se si do t'i klasifikoni dhe si do t'i përdorni në sfera të ndryshme, sikurse janë arkitektura, inxhinieria dhe shkencat e natyrës.

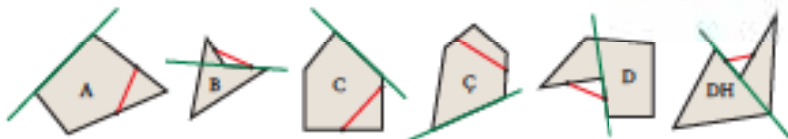


Shembulli 1

Imagjinoni një hartë me kuptim bazik shumëkëndëshin. Mundohuni të përfshini edhe konceptet tashmë të njohura dhe klasifikimet përkatëse në lidhje me këtë koncept.

Shembulli 2

Përdorni vizatimin për të dhënë përgjigje në pyetjet e parashtruara.



- Në secilin shumëkëndësh kemi tërhequr segment? Çka mund të thuani për segmentin në secilin shumëkëndësh?
- Nëpër njërin nga brinjët e secilit shumëkëndësh është tërhequr drejtëz. Cili është dallimi mes shumëkëndëshave në lidhje me drejtëzën?

Zgjidhje:

- Në disa prej shumëkëndëshave segmenti nuk përfshihet në to. A vlen kjo për secilin segment në disa prej shumëkëndëshave? Për cilët shumëkëndësha?

Shumëkëndëshi quhet konveks nëse është formë gjeometrike 2D konvekse, përkatësisht nëse për çdo dy pika A dhe B të atij shumëkëndëshi, segmenti AB përmbahet në të.

- Te shumëkëndëshat A, B dhe Ç mund të vërejmë se shumëkëndëshi plotësisht është në njërin anë të drejtëzës, ndërsa te shumëkëndëshat B, D dhe DH shumëkëndëshat jo plotësisht janë nga njëra anë e drejtëzës përkatëse. A vlen kjo për secilën brinjë të shumëkëndëshit në të cilin është vizatuar drejtëza që e përmban atë brinjë? Për cilët shumëkëndësha je përgjigjur me PO, ndërsa për cilët me JO?

Mund të përfundojmë:

1. Nëse për secilën brinjë të shumëkëndëshit vizatojmë drejtëz që e përmban atë brinjë dhe i gjithë shumëkëndëshi mbetet në njërën anë të asaj drejtëze (për secilën drejtëz veç e veç), atëherë shumëkëndëshi është konveks.
2. Nëse për ndonjë brinjë të shumëkëndëshit kemi drejtëz që përmban atë brinjë dhe një pjesë e shumëkëndëshit është në njërën anë të drejtëzës, ndërsa një pjesë e tij në anën e kundërt të asaj drejtëze, atëherë shumëkëndëshi nuk është konveks, por jokonveks.

Detyra 1

Në vizatim janë dhënë dy forma 2D.

- a) Forma e parë 2D është konvekse ose jokonvekse?
Shpjegoni përgjigjen!
- b) Forma e dytë 2D është konvekse ose jokonvekse?
Shpjegoni përgjigjen!



Shembulli 3

Markoja dhe Lena vendosin të vënë gardh përreth kopshtit të tyre. Ata kanë dy mundësi: të bëjnë gardh në formë të shumëkëndëshit konveks ose gardh në formë të shumëkëndëshit jokonveks.

- a) Cili gardh do të ishte më i lehtë ta bënin ata?
- b) Cila formë e gardhit ka kënde ose pjesë që duhet të shënohen ndryshe ose duhet të kryhet punë shtesë?
- c) Cilat do të ishin përparësitë e cilat do të ishin mangësitë e shumëkëndëshit konveks në raport me shumëkëndëshin jokonveks?

Zgjidhje:

- a) Shumëkëndëshi konveks (mundësia e parë): Gardhi do të instalohej lehtë sepse e gjithë forma do të ishte nga njëra anë e drejtëzës që do të përmbante secilën prej brinjëve të tij.
- b) Shumëkëndëshi jokonveks (mundësia e dytë): Në disa prej brinjëve dhe këndeve mund të ketë vështirësi në vendosjen e gardhit sepse pjesë të formës do të ishin në anë të ndryshme të drejtëzës përkatëse.
- c) Përzgjedhja e gardhit dhe mënyrës së vendosjes mund të varet nga ajo nëse kopshti është shumëkëndësh konveks ose jo konveks. Te shumëkëndëshat konveks do të jetë më e lehtë vendosja e gardhit, përderisa te shumëkëndëshat jo konveks duhet të bëhen përshtatje shtesë.

Detyra 2

Ku i hasim shumëkëndëshat konveks, e ku ata jokonveks?



Detyra 3

Vrojtoni disa objekte përreth, për shembull, objekte në shtëpi ose në natyrë, dhe caktoni nëse kanë formë të shumëkëndëshave konveks ose jokonveks. Shkruani disa shembuj dhe sqaroni pse i klasifikoni në këtë mënyrë.

Imagjinoni se duhet projektuar një objekt i ri për një hapësirë publike (si për shembull park ose qendër tregtare). Si do të merrnit vendim nëse do të përdornit forma konvekse ose jokonvekse gjatë projektimit? Çfarë përparësish dhe mangësish, përkatësisht, do të kishin format në ndërtimin dhe përdorimin e objektit? Shqyrtoni ndikimin e këndeve mbi funksionin dhe estetikën e hapësirës!

Përgjigjuni, në fletore, pyetjeve të parashtruara dhe më pas ndani ato me shokët e klasës.

- Dalloj dhe mund të shpjegoj dallimin mes shumëkëndëshave konveks dhe atyre jokonveks.
- Drejt mund t'i klasifikoj shumëkëndëshat në konveks dhe jokonveks.
- Mund t'i zbatoj njohuritë për shumëkëndëshat konveks dhe ata jokonveks në detyra të përditshmërisë dhe shembuj praktik.

Punë e pavarur

1. Problem në lidhje me përzgjedhjen e projektit të parkut

Përshkrimi: Duhet të bëhet rregullimi i parkut të ri me shtigje dhe sipërfaqe të gjelbra. Parku duhet të ketë forma të ndryshme 2D. Shtegu që shpie te hyrja kryesore duhet të ketë formë konvekse, ndërsa shtegu që shpie deri te pjesët e brendshme të parkut do të ketë formë jokonvekse (konkave).

Pyetje: Cilat do të jenë dallimet në estetikë dhe funksion nëse përdor forma konvekse dhe jokonvekse për këtë shtigje?

2. Problem për përzgjedhjen e gardhit, rrethojës, për kopshtin

Përshkrimi: Projektoni gardhin për kopshtin tuaj. Për një pjesë të rrethojës do të përdorni panele kënddrejtë (shumëkëndësh konveks), ndërsa për pjesë tjetër të rrethojës së kopshtit keni dëshirë të përdorni rrethojë në formën e një shumëkëndëshi jokonveks.

Pyetje: Çfarë përparësish dhe mangësish do të kishin këto dy lloje projektimi në kuptimin e sigurisë dhe estetikës së gardhit tuaj?

3. Problemi i ndërtimit të kulmit

Përshkrimi: Kur ndërtohet kulmi i shtëpisë, duhet të vendoset nëse do të përdoren forma konvekse ose forma jokonvekse për të krijuar një dizajn interesant.

Pyetje: Cila formë do të ishte më efikase për shkarkimin e ujërave të shirave dhe pse?

4. Problemi i rregullimit të trotuarit

Përshkrimi: Për ndërtimin e trotuarit, duhet të përzgjidhni nëse do të përdorni pllaka në formë të shumëkëndëshave konveks ose do të vendosni për shumëkëndësha jokonveks që të japin efekt pamor më interesant.

Pyetje: Cilat do të ishin përparësitë dhe mangësitë e dy llojeve të projektimit në lidhje me sigurinë dhe komfortin e këmbësorëve?

Konceptet bazike për trekëndëshat

Në këtë njësi do të zgjidhni probleme me zbatimin e koncepteve bazike lidhur me trekëndëshat, duke përfshirë mesoren, ortoqendrën, qendrën e rëndimit, vijën e brendashkruar dhe jashtashkruar rrethore dhe shumën e këndeve të trekëndëshit. Trekëndëshi është një nga format gjeometrike më të rëndësishme. Ai karakterizohet me tri brinjë dhe tre kënde, ndërsa ka një numër vetësh shumë të rëndësishme që lidhen me karakteristikat e tij.



Shembulli 1

- Vizatoni një trekëndësh këndngushtë dhe një trekëndësh këndgjerë.
- Sqaroni çka quajmë lartësi të trekëndëshit. Tërhiqni dhe emërtoni lartësitë e trekëndëshave nga detyra nën a).
- Për secilin nga trekëndëshat që i vizatuat nën a) tërhiqni vijat e rëndësës. Shpjegoni çka është vija e rëndësës e trekëndëshit.
- Vizatoni një vijë rrethore brendashkruar dhe një vijë rrethore jashtashkruar një trekëndëshi këndngushtë dhe një trekëndëshi këndgjerë.
- Për secilin prej trekëndëshave nën a) matni dhe gjeni shumën e këndeve të brendshme të trekëndëshit.

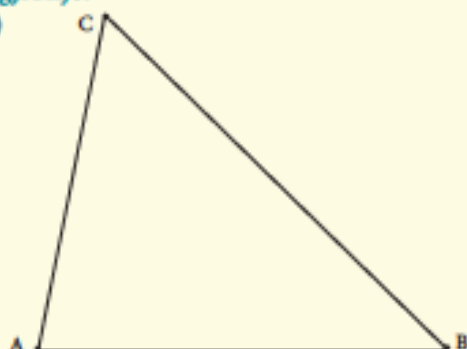
Shembulli 2

Në $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm.

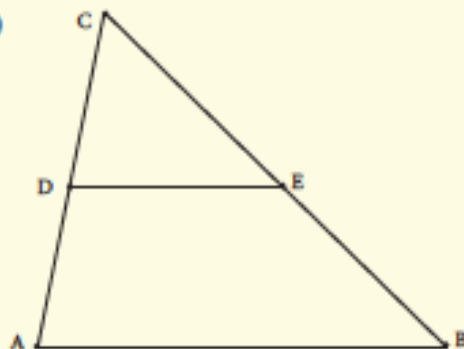
- Vizatoni trekëndëshin në fletore dhe shënoni kulmet e tij me A, B dhe C.
- Shënoni mesin e brinjës AC me D, ndërsa mesin e brinjës BC me E. Lidhni pikat D dhe E; matni gjatësinë e segmentit DE. Çfarë përfundimi mund të sillni për gjatësinë e segmentit DE?

Zgjidhje:

a)



b)



Nëse vizatimi është realizuar me saktësi, atëherë gjatësia e segmentit $\overline{DE} = 3$ cm. Ai është paralel me brinjën me të cilën nuk ka pika të përbashkëta dhe është sa gjysma e gjatësisë së brinjës AB të $\triangle ABC$.

Lidhni pikat e mesme të brinjëve AB dhe AC, si dhe të brinjëve AB dhe BC. Çka mund të thuani për segmentet e fituar? Sa janë gjatësitë e tyre?

Vija e mesme është segmenti që lidh pikat e mesme të dy brinjëve të trekëndëshit.

Vija e mesme është paralele me brinjën me të cilën nuk ka pika të përbashkëta dhe ka gjatësinë sa gjysma e asaj brinje.

Në shembullin 1, nëse e shënojmë vijën e mesme DE me m , atëherë kemi $m = \overline{DE} = \frac{AB}{2}$, $m \parallel AB$.

Detyra 1

Në $\triangle DEF$, brinja $\overline{DE} = 10\text{cm}$, $\overline{EF} = 12\text{cm}$, $\overline{DF} = 14\text{cm}$.

- Vizatoni $\triangle DEF$ dhe vijat e mesme të tij.
- Sa është gjatësia e secilës prej vijave të mesme?
- Në sa trekëndësha e ndajnë, vijat e mesme, trekëndëshin $\triangle DEF$?
- Vizatoni përsëri trekëndëshin dhe caktoni qendrën e rëndimit (T) të trekëndëshit. Në secilën mesore matni largësinë nga kulmi deri te qendra e rëndimit dhe nga qendra e rëndimit deri te pika e mesme e brinjës përballë këtij kulmi. Në çfarë raporti qendra e rëndimit e ndan mesoren?
- Si do të kontrolloni nëse keni qenë preciz gjatë vizatimit?
Sa është shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshit?
Sa është shuma e këndeve në rastin tuaj?

Shembulli 3

Aleksandra dëshiron të bëjë një kornizë druri zbukuruese në formën e një trekëndëshi për ta vënë përreth një aranzhmani me lule. Ajo duhet të caktojë disa pika të rëndësishme që konstruksioni i saj të jetë i qëndrueshëm, stabil.

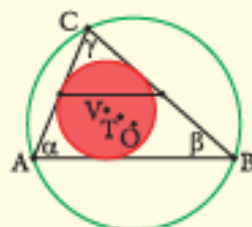
- Ku, ajo, duhet ta vendos shiritin zbukurues që do të jetë paralel me njërin nga brinjët e trekëndëshit dhe ka gjatësinë sa gjysma e saj?
- Si do të duhej ta vendoste kornizën trekëndore ashtu që secila brinjë e saj ta prek aranzhmanin rrethor të luleve?
- Cilën pikë të trekëndëshit duhet ta caktojë që ta balancojë kornizën në një pikë?
- Si mund të bëjë zbukurim në formë rrethi që kalon nëpër tre kulmet e trekëndëshit?

- d) Aleksandra dëshiron të mat këndet e trekëndëshit të saj që të jetë e sigurt se konstruksioni i saj është i saktë. Sa duhet të jetë shumja e këndeve të brendshme të trekëndëshit?

Zgjidhje:

Që t'i ndihmojmë Aleksandrës, vizatojmë sipas udhëzimeve të dhëna:

- Shiritin duhet ta vendos përgjatë gjatësisë së vijës së mesme të trekëndëshit, paralele me bazën e tij.
- Që të vendos trekëndëshin përreth aranzhmanit rrethor me lule, Aleksandra duhet të caktojë qendrën e vijës rrethore brendashkruar trekëndëshit.
- Që ta balancojë kornizën në një pikë, Aleksandra duhet të caktojë qendrën e rëndimit të trekëndëshit. Si do ta gjeni qendrën e rëndimit të trekëndëshit?
- Për të bërë zbukurimin formë rrethore që kalon nëpër të tre kulmet e trekëndëshit, ajo duhet të caktojë qendrën e vijës rrethore jashtashkruar trekëndëshit.
- Nëse shumja e këndeve të trekëndëshit është 180° , atëherë ajo mund të jetë e sigurt se konstruksioni është i saktë.



Detyra 2

Iliri dëshiron të ndërtojë një platformë në formën e një trekëndëshi e që do të ishte stabile. Për këtë qëllim, ai duhet të caktojë disa pika kyçe të trekëndëshit për të vënë shtyllat mbështetëse dhe kabllot.

- Që platforma të jetë stabile, Iliri duhet të gjej atë pikë në trekëndësh ku do të mund të vendos mbështetjen qendrore që në mënyrë të njëtrajtshme do t'i shpërndajë forcat që veprojnë në platformën e tij. Cila pikë në trekëndësh e përfaqëson këtë pikë mbështetëse stabile dhe si mund ta gjej ai atë?
- Kabllot duhet të jenë të varura për platformën, ashtu që do të jenë njëlloj të larguara nga gjitha tri pikat mbështetëse të platformës. Cila pikë e trekëndëshit duhet gjetur nga Iliri për t'i varur kabllot, ashtu që distanca deri te tre kulmet e platformës të jetë e barabartë?
- Për të përforcuar platformën, Iliri dëshiron të vendos një tra që do të lidh qendrën e dy brinjëve të trekëndëshit – platformës. Si mund ta gjej këtë gjatësi?

Nëse ke tri shufra me gjatësi 5 cm, 7 cm dhe 12 cm, a mund të formoni një trekëndësh me to? Shpjegoni si të ndihmon rregulla për gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit për të përcaktuar këtë.

Vizatoni një trekëndësh në fletore.

A mund dikujt tjetër qartë t'i shpjegoj atë që kam mësuar?

A i kuptoj konceptet bazike për trekëndëshat (brinjë, kënde, lartësi, qendër rëndimi etj.)?



A mund t'i përdor rregullat për trekëndëshat me qëllim zgjidhjen e detyrave?

Secilin kënd të trekëndëshit ngjyrosni sipas ndjesisë suaj të sigurisë për secilin kriter.

Gjelbër – Plotësisht e kuptoj dhe mund ta zbatoj.

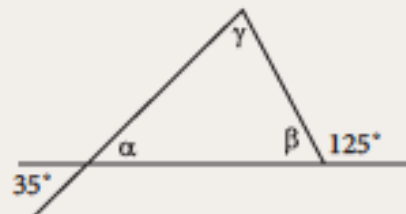
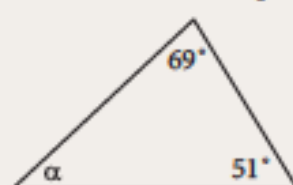
Verdhë – Pjesërisht e kuptoj, por më duhen ushtrime plotësuese.

Kuqe – Nuk ndjem i sigurt dhe më duhen shpjegime.

Nëse ndonjëri kënd është i verdhë ose i kuq, shkruaj pyetjen për të cilën kërkon sqarime plotësuese.

Punë e pavarur

1. Nëse në $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, sa është madhësia (masa) e këndit te kulmi C?
2. Shpjegoni lidhjen mes madhësisë së këndeve dhe brinjëve të trekëndëshit në të cilin të gjitha këndet e brendshme janë me nga 60° . Si janë brinjët e këtij trekëndëshi për nga gjatësia?
3. Në $\triangle ABC$, nëse këndi i brendshëm te kulmi B është 60° , ndërsa te kulmi C është 50° , njehsoni këndin e jashtëm të këtij trekëndëshi në kulmin A.
4. Është dhënë trekëndëshi me kulme të brendshme $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ dhe $\angle C = 80^\circ$. Nëse $\angle A$ mbetet 40° , këndi $\angle C$ rritet për 10° , ndërsa të tre këndet akoma formojnë trekëndësh, atëherë sa gradë duhet të jetë këndi i ri në kulmin B?
5. Në një trekëndësh kënddrejtë me brinjë 3 cm, 4 cm dhe 5 cm, sa është këndi ndërmjet brinjëve me gjatësi 3 cm dhe 4 cm?
6. Caktoni këndet e panjohura në vizatimet në vijim



7. Në trekëndëshin ABC është dhënë se këndi te kulmi B është 15° më i vogël se këndi te kulmi A, ndërsa këndi te C është 30° më i madh se kulmi te B. Gjeni të tre këndet e trekëndëshit.
8. Në trekëndëshin ABC këndi B është tre herë më i vogël se këndi te kulmi A, ndërsa këndi te C është dy herë më i madh se kulmi te B. Gjeni të tre këndet e trekëndëshit.
9. Në trekëndëshin ABC, brinja $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm.
 - a) Në varshmëri nga madhësia e brinjëve, provoni se për çfarë lloji të trekëndëshit bëhet fjalë dhe përcaktoni cili kënd do të jetë më i madh, e cili më i vogël.
 - b) Njehsoni gjatësinë e secilës vijë të mesme të trekëndëshit.
10. Për trekëndëshin ABC gjatësitë e vijave të mesme janë 3 cm, 5 cm dhe 6 cm. Sa janë gjatësitë e brinjëve të këtij trekëndëshi?
11. a) Vizatoni një trekëndësh barabrinjësh.
b) Caktoni ortoqendrën e trekëndëshit.
12. Vizatoni një trekëndësh kënddrejtë me katete 8 cm dhe 6 cm.
 - a) Matni gjatësinë e hipotenuzës.
 - b) Vizatoni vijën rrethore brendashkruar trekëndëshit.
 - c) Vizatoni vijën rrethore jashtashkruar trekëndëshit.

Konstruktimi i trekëndëshave

Në këtë njësi do të mësojmë se si të konstruktojmë trekëndësha në raste të ndryshme, duke përdorur informacionet e dhëna: tri brinjë, dy brinjë dhe këndi mes tyre, një brinjë dhe dy kënde që shtrihen në atë brinjë. Trekëndëshi është formë gjeometrike me tri brinjë dhe tre kënde. Konstruktimi i trekëndëshave mund të bëhet me kombinime të ndryshme të të dhënave, sikurse janë brinjët dhe këndet.



Shembulli 1

Bëni një flamur për gara sportive. Flamuri duhet të jetë në formën e trekëndëshit kënddrejtë me katetë 4 cm dhe kënd prej 30° ndërmjet katetës dhe hipotenuzës. Për këtë qëllim, përdorim një fletë prej letre, vizore, këndmatës, trekëndësh, kompas dhe laps.

Zgjidhje:

Fillimisht me vizore i vizatoni elementet e dhëna.

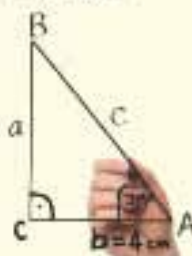
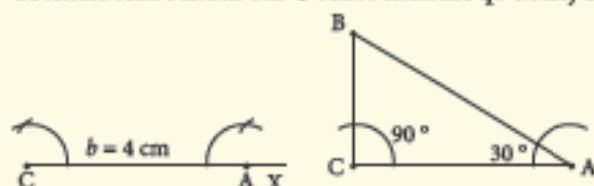
Këndet 30° dhe 90° mund t'i konstruktojmë me kompas (këndet që nuk mundeni t'i konstruktioni, vizatoni me këndmatës). Më pas me dorë të lirë bëni skicën e trekëndëshit që duhet ta konstruktioni duke shënuar elementet e tij. Vijon analiza e skicës dhe zbatimi i saj në hapat e konstruktimit.

Ndiqui hapat dhe vizatoni në fletore.

Hapat e konstruktimit:

- Vizatoni gjysmëdrejtëzën CX dhe në të, me kompas, bartni segmentin prej 4 cm duke nisur nga pika C.
- Pikën e skajshme të këtij segmenti shënoni me A.
- Bartni këndet 30° dhe 90° në kulmet A dhe C, përkatësisht.
- Tërhiqni krahët e këndeve të bartura.
- Prerjen e krahut të dytë të këndit 30° dhe krahut të dytë të këndit të drejtë shënoni me B.

Trekëndëshi i fituar ABC është flamuri që duhej bërë.



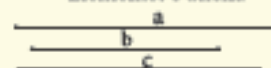
Shembulli 2

Konstruktioni trekëndësh me brinjë $a = 35$ mm, $b = 25$ mm, $c = 32$ mm.

Zgjidhje:

- Vizatoni, me vizore, elementet e dhëna të trekëndëshit.
- Bëni skicën e trekëndëshit dhe shënoni elementet (kulmet, brinjët dhe këndet).
- Nga analiza e skicës arrihet deri te hapat e konstruksionit.

Elementet e dhëna

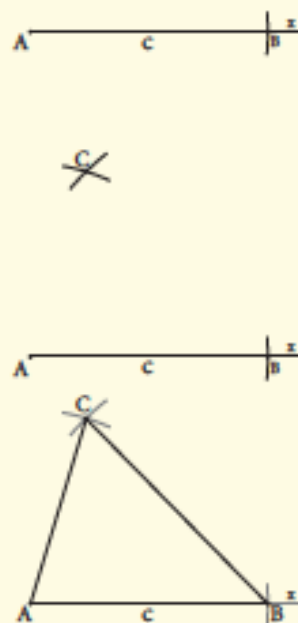


Skica



Hapat e konstruktimit të trekëndëshit kur janë dhënë tri brinjë (BBB):

- Vizatoni gjysmëdrejtëzën AX dhe me kompas bartni gjatësinë e brinjës c .
- Prerjen e harkut rrethor me gjysmëdrejtëzën AX shënoni me B .
- Me kompas merrni gjatësinë b dhe majën e kompasit vendosni në pikën A (përkatësisht, vizatoni një hark rrethor me qendër në A dhe rreze b).
- Më pas hapni kompasin sa gjatësia e brinjës a dhe majën e kompasit vendosni në pikën B (vizatoni hark rrethor me qendër në B dhe rreze a).
- Prerja e dy harqeve rrethore që do t'i bësh do të jetë pika C . Nëse ka dy pika prerëse, zgjidhni njërën (varësisht nga kushtet e detyrës).
- Me vizore lidhni pikat A dhe C , B dhe C .
- $\triangle ABC$ është konstruktuar.



Detyra 1

Konstruktioni një trekëndësh me brinjë 5 cm, 7 cm dhe 9 cm. Provoni nëse gjitha brinjët janë të barabarta me gjatësitë e dhëna.

Shembulli 3

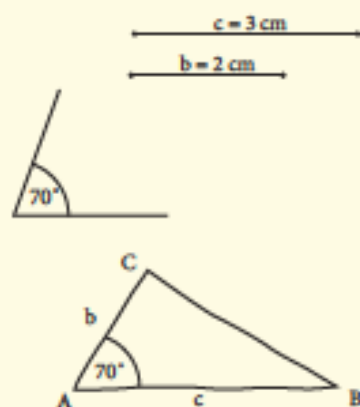
Janë dhënë dy brinjë të trekëndëshit $b = 2\text{ cm}$ dhe $c = 3\text{ cm}$ dhe këndi mes tyre $\alpha = 70^\circ$. Përdorni vizore dhe kompas për të konstruktuar trekëndëshin.

Zgjidhje:

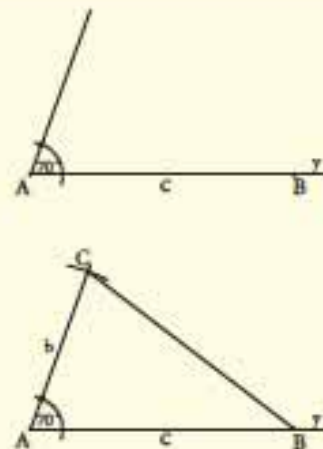
- Vizatoni elementet e dhëna të trekëndëshit, dy brinjët dhe këndin mes tyre, me vizore dhe këndmatës.
- Bëni skicën e trekëndëshit dhe shënoni elementet e tij (kulmet, brinjët dhe këndet).
- Nga analiza e skicës arrihet deri te hapat e konstruktimit.

Hapat për konstruktimin e trekëndëshit kur janë dhënë dy brinjë dhe këndi mes tyre (BKB):

- Vizatoni gjysmëdrejtëzën AY .
- Hapni kompasin sa është segmenti $c = AB$, përkatësisht sa njëra brinjë e trekëndëshit (vizatoni hark rrethor me qendër A dhe rreze $c = AB$).



- Prerjen e harkut rrethor me gjysmëdrejtëzën shënoni me B, d.m.th. $k(A, AB) \cap AY = \{B\}$.
- Me kompasin e vendosur në kulmin A, bartni këndin 70° .
- Me vizore, tërhiqni krahun e dytë të këndit 70° .
- Në krahun e dytë të këndit 70° bëni një hark rrethor me kompas të cilin e hap atë sa është brinja $b = AC$ duke filluar nga pika A (hark rrethor me qendër në A dhe rreze $b = AC$).
- Prerjen e krahut të dytë të këndit me harkun e shënojmë me C.
- Lidhni pikat B dhe C.
- $\triangle ABC$ u konstruktua.

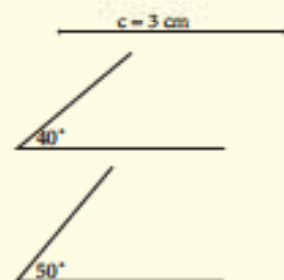
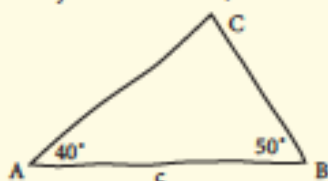


Shembulli 4

Konstruktioni trekëndësh nëse është dhënë njera brinjë e tij $c = 3$ cm dhe dy kënde $\alpha = 40^\circ$ dhe $\beta = 50^\circ$ që shtrihen mbi brinjën e dhënë të trekëndëshit.

Zgjidhje:

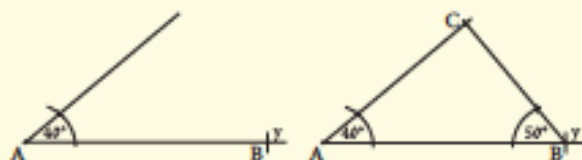
- Vizatoni me vizore dhe këndmatës, elementet e dhënë të trekëndëshit, brinjën dhe dy këndet.
- Bëni skicën e trekëndëshit dhe shënoni elementet e tij (kulmet, brinjët dhe këndet).



- Nga analiza e skicës arrijmë deri te hapat për konstruktimin.

Hapat për konstruktimin e trekëndëshit kur jepet njera brinjë dhe dy këndet mbi këtë brinjë: (KBK)

- Vizatoni gjysmëdrejtëzën AY.
- Bartni gjatësinë $c = AB$ dhe shënoni pikën B.
- Bartni me kompas këndin 40° me kulm në pikën A.
- Bartni me kompas këndin 50° me kulm në pikën B.
- Prerjen e krahëve të fituar të këndeve 40° dhe 50° shënoni me C.
- $\triangle ABC$ u konstruktua.



Detyra 2

Konstruktioni trekëndësh për të cilin jepen:

- a) $\overline{MN} = 7 \text{ cm}$, $\angle NMP = 65^\circ$, $\angle MNP = 70^\circ$ b) $\overline{KL} = 7 \text{ cm}$, $\overline{KQ} = 6 \text{ cm}$, $\overline{LQ} = 5 \text{ cm}$
 c) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$, $\angle ABC = 45^\circ$

Shembulli 5

Një punëtor ndërtimi gjatë ndërtimit të kulmit duhet të konstruktojë një trekëndësh për të cilin janë dhënë brinja 9 m dhe dy këndet që shtrihen në këtë brinjë prej 45° dhe 65° . Udhëzime për zgjidhjen: Në fletore në vend të metrave përdorni centimetrat dhe ndiqni hapat e konstruktimit nga shembulli i katërt (KBK). Kontrolloni nëse në trekëndëshin e fituar shuma e këndeve është 180° .

Detyra 3

Gjatë matjeve gjeodezike duhet të konstruktohet një hartë tereni ku një trekëndësh ka këto elemente: një brinjë $\overline{AB} = 8 \text{ m}$, brinjën tjetër $\overline{AC} = 7 \text{ m}$ dhe këndin mes tyre $\angle CAB = 50^\circ$. Duke shfrytëzuar raport të caktuar, konstruktioni në fletore trekëndëshin dhe matni gjatësinë e brinjës përballë këndit 50° . Sa është gjatësia e saj e vërtetë?

Kur konstruktioni trekëndëshat e kësaj njësie, cilët hapa ishin më të lehtë, e cilët më sfidues? Çka do të ndryshonit në qasjen tuaj që në të ardhmen të jeni më të shpejtë dhe më preciz në detyrat ku kërkohet konstruktimi i trekëndëshit?

Përgjigjuni në fletore. Për konstruktimin e trekëndëshit për të cilin nuk jeni të sigurt, shihni përsëri shembujt e mësipërm.

- Shkruani mendimin tuaj për konstruktimin e trekëndëshave.
- A keni arritur të zbatoni rregullat dhe konceptet në detyra praktike?
- A e kuptoni dallimin mes mënyrave të ndryshme të konstruktimit?

Punë e pavarur

1. Konstruktioni trekëndësh barabrinjës me brinjë 5 cm.
- 2*. Konstruktioni trekëndësh kënddrejtë me hipotenuzë 6 cm dhe njërin kënd 45° .
3. Konstruktioni trekëndësh dybrinjëshëm me bazë 7 cm dhe kënd mbi bazën prej 55° .
4. Konstruktioni trekëndësh dybrinjëshëm me brinjët e njëjta 8 cm dhe këndin mes tyre prej 75° .
5. Konstruktioni trekëndësh dybrinjëshëm kënddrejtë me brinjët e njëjta 4 cm.

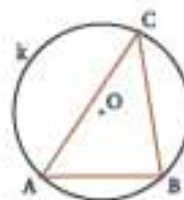
Konstruktimi i vijës rrethore jashtashkruar dhe brendashkruar trekëndëshit

Në këtë njësi do të mësoni se si të konstruktioni qendrën e vijës rrethore jashtashkruar dhe brendashkruar trekëndëshit si edhe rëndësinë e këtyre pikave në konstruktimet gjeometrike. Qendrat e vijave rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar trekëndëshit janë pika të rëndësishme të trekëndëshit. Këto pika janë të rëndësishme sepse me anë të tyre mund të krijoni vijë rrethore që prek brinjët e trekëndëshit (brendashkruar trekëndëshit) ose që kalon nëpër kulmet e trekëndëshit (jashtashkruar trekëndëshit). Këto janë kyçe për detyra të ndryshme gjeometrike, si edhe në projektim dhe inxhinieri.



Shembulli 1

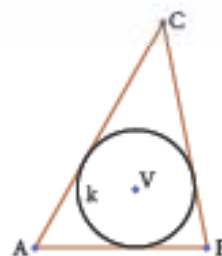
Vizatoni vijë rrethore jashtashkruar trekëndëshit me brinjë 5 cm, 6 cm dhe 7 cm. Shpjegoni çka është vija rrethore jashtashkruar trekëndëshit. Nëse keni vizatuar saktë, vija rrethore do të kalojë nëpër kulmet e trekëndëshit.



Shembulli 2

Vizatoni vijë rrethore brendashkruar trekëndëshit me brinjë 6 cm, 8 cm dhe 9 cm. Shpjegoni çka është vija rrethore e brendashkruar trekëndëshit. Nëse vizatimi juaj është në rregull, atëherë vija rrethore do t'i prek të tri brinjët e trekëndëshit. Çka paraqet, për vijën rrethore, secila brinjë e trekëndëshit?

Që t'i gjeni qendrat e vijës së brendashkruar dhe jashtashkruar trekëndëshit, në shembujt e mësipërm keni përdorur vizore dhe këndmatës.



Shembulli 3

Konstruktioni qendrën e vijës rrethore jashtashkruar trekëndëshit me brinjë 6 cm, 5 cm dhe 4cm.

Kur thuhet "konstruktoni" mendohet në përdorimin vetëm të vizores dhe kompasit.

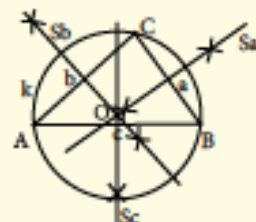
Zgjidhje:

Për këtë konstruktiv mund të rikujtoni konstruktimin e trekëndëshit kur jepen tri brinjët e tij dhe konstruktimin e simetrales së segmentit. Që të konstruktioni qendrën e vijës rrethore të jashtashkruar, ndiqni hapat vijues dhe vizatoni në fletore:

- Konstruktioni $\triangle ABC$ me tri brinjët e dhëna (BBB). Konstruktioni simetralen e brinjës AB të $\triangle ABC$.
- Konstruktioni simetralen e brinjës BC.
- Konstruktioni simetralen e brinjës CA (kjo simetrale mund edhe të mos konstruktohet, pse?)

- Prerjen e simetraleve të $\triangle ABC$ shënoni me O.
- Majën e kompasit e vendosni në pikën O.

Hapni kompasin deri te cilido kulm i trekëndëshit dhe përshkoni vijën rrethore.



Shembulli 4

Konstruktioni qendrën e vijës rrethore brendashkruar trekëndëshit me brinjë 6 cm, 8 cm dhe këndin 70° .

Zgjidhje:

Për këtë konstruktim fillimisht mund të rikujtojmë konstruktimin e trekëndëshit nëse janë dhënë dy brinjë dhe këndi mes tyre dhe konstruktimi i simetraleve të këndit. Për të konstruktuar qendrën e vijës rrethore brendashkruar trekëndëshit, ndiqni hapat dhe vizatoni në fletore:

- Konstruktioni trekëndësh me dy brinjë dhe një kënd të dhënë mes tyre (BKB).
- Konstruktioni simetralen e $\angle A$ të $\triangle ABC$.
- Konstruktioni simetralen e $\angle B$ të $\triangle ABC$.
- Konstruktioni simetralen e $\angle C$ të $\triangle ABC$ (mund të mos e konstruktojmë, mjaftojnë dy).
- Prerjen e simetraleve të këndeve të trekëndëshit e shënojmë me V.
- Vendosni majën e kompasit në pikën V.

Hapni kompasin sa është distanca deri te cilado brinjë e trekëndëshit (në vizatim e shënuar me r) dhe vizatoni vijën e kërkuar rrethore.

Në shembullin 3 dhe shembullin 4, që të konstruktioni vijën rrethore të jashtashkruar dhe brendashkruar trekëndëshit, keni përdorur vizore dhe kompas. Cila mënyrë është më precize, e konstruktimit të vijës rrethore të jashtashkruar dhe vijës rrethore të brendashkruar trekëndëshit, me vizore dhe këndmatës ose me vizore dhe kompas?



Detyra 1

Konstruktioni vijën rrethore të jashtashkruar dhe brendashkruar trekëndëshit me brinjë 5 cm dhe kënde në këtë brinjë 30° dhe 70° .

Shembulli 5

Në një park planifikohet të ndërtohet një fontanë në formën e vijës rrethore ashtu që ajo do t'i prek të tri shtigjet që formojnë një trekëndësh. Më pas duhet të vendoset një pjesë me lule me formë rrethore jashtashkruar këtij trekëndëshi.

Zgjidhje:

- Bëni skicë sipas të dhënave nga shembulli 5.
- Vizatoni trekëndëshin e krijuar me shtigjet në park (me gjatësi të brinjëve sipas dëshirës).
- Konstruktioni vijën rrethore brendashkruar trekëndëshit për të caktuar pozicionin e fontanës.
- Konstruktioni vijën rrethore jashtashkruar trekëndëshit për të planifikuar pjesën me lule rreth trekëndëshit.

Kjo do të sigurojë vendosjen estetike të fontanës dhe pjesës me lule në lidhje me shtigjet në park.

Detyra 2

Në një shesh, formë trekëndëshi, të qytetit, duhet vënë llamba:

- Një llambë, kryesore, është në qendër të sheshit për ndriçim të njëtrajtshëm (njëlloj e larguar nga trija brinjët e trekëndëshit).
- Llamba dekoruese në vijën rrethore rreth sheshit për të ndriçuar gjithë sipërfaqen.

Si do të përcaktonit:

- Vendndodhjen e llambës kryesore?
- Rrezen dhe qendrën e vijës rrethore për vendosjen e llambave dekoruese?

Përmendni shembuj ku mund të përdorni konstruktimin e vijës rrethore brendashkruar dhe asaj jashtashkruar trekëndëshit? Shpjegoni rëndësinë e precizitetit gjatë konstruktimit në situatat e tilla.



Shkruani në fletore. Përgjigjet ndani me shokët e klasës.

- Shkruani një reflektim të shkurtër për atë që mësuat për konstruktimin e qendrës së vijës rrethore brendashkruar dhe jashtashkruar trekëndëshit.
- A keni arritur t'i përdorni drejt konceptet?
- Çfarë detyra nga jeta e përgjithshme mund të zgjidhni me këto teknika?

Punë e pavarur

Detyra për konstruktimin e vijës rrethore brendashkruar dhe jashtashkruar trekëndëshit:

1. Vizatoni gardh rrethor rreth hapësirës trekëndore (me brinjë 7 m, 5 m dhe 8 m). Përdorni raport.
2. Projektoni lulishte formë rrethore përreth fontanës me formë të trekëndëshit dybrinjëshëm (barakrahës) me krah 7m dhe kënd mes krahëve prej 80° .
3. Vizatoni një vend për një përkujtimore në hapësirë formë trekëndëshi (njëra brinjë 4m dhe këndet mbi atë brinjë respektivisht 45° dhe 45°), më pas konstruktioni vijën rrethore përreth trekëndëshit e cila do të shërbejë për elemente shtesë dekorues (përdor raport).
4. Konstruktioni vijën rrethore brendashkruar dhe jashtashkruar trekëndëshit barabrinjesh me brinjë 5,5 cm.
5. Simoni në arën e tij përzgjedhi tri pika në të cilat dë të vendos spërkatëse për ujitje. E ndihmoni atë që të gjej pikën qendrore për pozicionimin e vendit për prurjen e ujit që do të jetë njëlloj i larguar nga spërkatëset për ujitje.
6. (Detyrë me përdorim të softuerit arsimor). Duhet të përpiloni një projekt për parkun e ri të qytetit. Parku duhet të ketë elementë gjeometrik sikurse janë shtigjet, aletë (rende me pemë), lulishte, çesma, stola, fontana, llamba, që formojnë trekëndësja dhe vija rrethore. Detyra juaj është të përdorni softuer arsimor për të vizatuar këto forma. Gjatë këtij projekti duhet të gjeni pikat prekëse mes trekëndësive dhe vijave rrethore për t'i siguruar largësitë e duhura dhe përpjestimet e dhëna të parkut, disa pika karakteristike të trekëndësive që i përgjigjen qëllimit i cili natyrisht, duhet të sigurojë stabilitet dhe rregullim të shumëllojshëm dhe të drejtë të hapësirës. Përdorni vegla të ndryshme të softuerit arsimor me të cilat do të paraqitni sa më shumë koncepte gjeometrike si konstruktimi, segmenti, këndi, simetralja, ortoqendra, qendra e rëndimit, vija rrethore e brendashkrur dhe jashtashkruar etj.

Katërkëndëshat dhe klasifikimi sipas çifteve të brinjëve paralele

Katërkëndëshat janë shumëkëndësja që kanë katër brinjë, katër kënde të brendshme (të jashtme) dhe katër kulme. Ata mund të klasifikohen përmes karakteristikave të ndryshme, sikurse janë: gjatësia e brinjëve, madhësia e këndeve ose çiftet e brinjëve paralele. Në këtë njësi do të fokusohemi në klasifikimin e katërkëndësive sipas brinjëve të kundërta paralele të tij. Do të mësoni si t'i dalloni llojet e katërkëndësive, sikurse janë drejtëkëndëshat, rombët, paralelogramet, trapezet dhe katrorët.

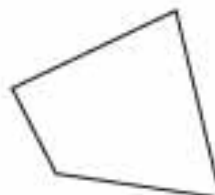
Këto njohuri nuk do të ndihmojnë vetëm në gjeometri, por do t'i përdorni edhe në përditshmëritë e juaja, për shembull, gjatë përzgjedhjes së formës në arkitekturë ose projektim.



Shembulli 1

Aleksandra dhe miqtë e saj vendosën të bëjnë një dekor për një event shkollor. Ata e prenë një copë letër në formën si në vizatim.

Përderisa e dekoronin formën që kishin prerë, u kujtuan për disa koncepte të rëndësishme gjeometrike. Rikujtohuni edhe ju, duke dhënë përgjigje në pyetjet:

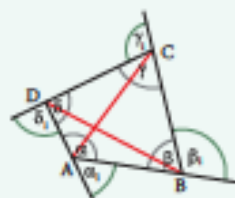


- Çfarë forme 2D kanë prerë Aleksandra me miqtë e saj? Shpjegoni pse.
- Katërkëndëshi i marrë në figurë është konveks ose jokonveks?
- Sa kulme, sa brinjë dhe kënde ka ky katërkëndësh?
- Cilat brinjë të katërkëndëshit janë fqinje, e cilat të kundërta?
- Cilët kulme të katërkëndëshit janë fqinjë, e cilët janë të kundërta?
- Cilët kënde të katërkëndëshit janë fqinjë, e cilët të kundërt?
- Cilët kënde të katërkëndëshit janë të brendshëm, e cilët të jashtëm?
- Si mund të gjeni një kënd të jashtëm të katërkëndëshit?
- Tërhiqni diagonalet e katërkëndëshit. Çfarë trekëndësja fitoni me secilën diagonale?

Shumëkëndëshin që ka katër brinjë (katër kulme, katër kënde) e quajmë katërkëndësh.

Zgjidhje:

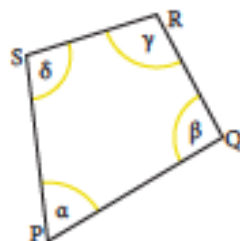
Që t'u përgjigjeni pyetjeve, bëni dhe përdorni një vizatim në fletore si vizatimi i dhënë djathtas.



Detyra 1

Për katërkëndëshin PQRS nga vizatimi i dhënë, shkruani:

- Kulmet fqinjë dhe të kundërt.
- Brinjët fqinjë dhe të kundërta.
- Këndet fqinjë dhe të kundërt.
- Sa çifte brinjësh të kundërta ka secili katërkëndësh?



Shembulli 2

Ana dhe Bojani luanin në park dhe vërejtën forma të ndryshme të pllakave të shtegut shtegut. Ana vërejtë se disa nga pllakat sikur kishin brinjë paralele, ndërsa të tjerat jo. Ata vendosën ta vizatojnë formën e disa pllakave dhe të kërkojnë ndihmë nga mësuesja që të mësojnë më shumë për to. Mësuesja u dha tri pyetje për t'i kategorizuar pllakat në varshmëri nga çiftet e brinjëve të kundërta paralele.



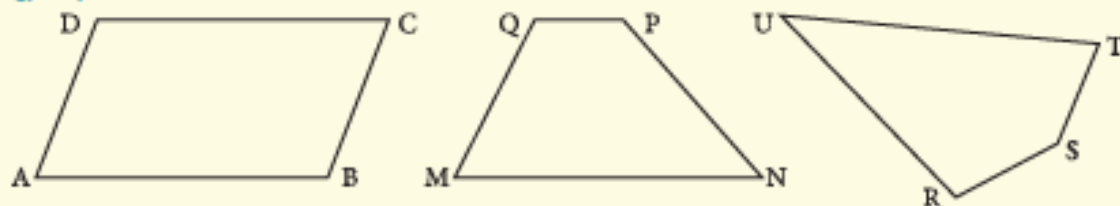
Pyetja e parë: Pllaka e Anës ka dy çifte brinjësh të kundërta paralele. Cilin lloj katërkëndëshi i takon kjo pllakë?

Pyetja e dytë: Bojani vizatoi një pllakë me vetëm një çift brinjësh të kundërta paralele, përderisa dy brinjët tjera nuk janë paralele. Me çfarë lloj katërkëndëshi kemi të bëjmë?

Pyetja e tretë: Në fund, ata vizatuan pllakë e cila nuk kishte asnjë çift brinjësh paralele të kundërta. Çfarë lloj katërkëndëshi është kjo formë?

Vizatoni tre katërkëndësha të ndryshëm që i përgjigjen përshkrimit të pyetjeve. Shënoni kulmet dhe provoni nëse brinjët janë paralele, e nëse përgjigja është pozitive, përgjigju sa çifte drejtëzash paralele kanë ata. Shpjegoni se në cilën kategori bie secili nga katërkëndëshat sipas çifteve të brinjëve të kundërta paralele.

Zgjidhje:



Katërkëndëshi i parë (i Anës) i takon kategorisë së katërkëndëshave që kanë dy çifte brinjësh të kundërta paralele.

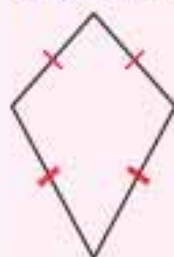
Katërkëndëshi i dytë (i Bojanit) i takon kategorisë së katërkëndëshave që kanë vetëm një çift brinjësh të kundërta paralele.

Katërkëndëshi i tretë i takon kategorisë së katërkëndëshave që nuk kanë asnjë çift brinjësh të kundërta paralele.

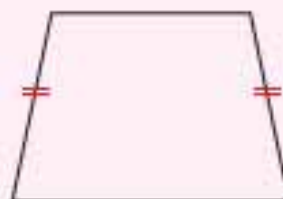
Nga pikëpamja nëse ka ose jo brinjë të kundërta paralele, katërkëndëshat mund t'i ndajmë në këto tri kategori:

- Katërkëndëshin në të cilin dy e nga dy brinjë të kundërta janë paralele e quajmë paralelogram.
- Katërkëndëshin që ka vetëm një çift brinjësh të kundërta paralele e quajmë trapez.
- Katërkëndëshin që nuk ka asnjë çift brinjësh të kundërta paralele e quajmë trapezoid.

Trapezoidin që ka dy çifte brinjësh fqinje të barabarta e quajmë deltoid.



Trapezi barakrahës është trapezi te i cili brinjët joparalele kanë gjatësi të barabarta.

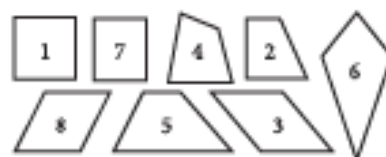


Detyra 2

Në vizatim janë dhënë më shumë katërkëndësha

a) Rishtas vizatoni në fletore dhe plotësoni tabelën e mëposhtme.

Katërkëndëshat	Numri me të cilin katërkëndëshi është shënuar
Paralelogram	
Trapez	
Trapezoid	

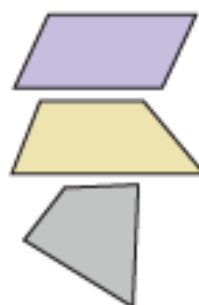


b) Cili nga katërkëndëshat është deltoid? Shpjegoni pse.

Shembulli 3

Bashkësia vendore organizon aktivitet për pastrimin e parkut.

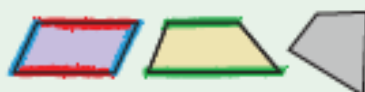
Vullnetarët vërejtën se disa nga pllakat e fushës së vjetër të lojërave ishin thyer dhe duhet të zëvendësohen. Pllakat e reja që duhet porositur janë në formë të katërkëndëshave, por furnizuesi i tyre ofron pllaka me forma të ndryshme katërkëndore. Që të lehtësojë punën, koordinatori i aktivitetit i kërkoi një vullnetari t'i klasifikojë pllakat në bazë të çifteve të brinjëve të kundërta paralele.



- Njëra nga pllakat e vjetra ky dy çifte paralele të brinjëve të kundërta. Cilit lloj katërkëndëshi i takon kjo pllakë?
- Njëra nga pllakat e reja ka vetëm një çift brinjësh paralele. Cilit lloj katërkëndëshi i takon kjo pllakë?
- Disa mbetje të pllakave të vjetra nuk kanë brinjë paralele. Cilit lloj katërkëndëshi i takojnë këto pllaka?
- Të vizatojë nga një katërkëndësh nga secila kategori (me dy çifte brinjësh paralele, me një çift brinjësh paralele dhe pa brinjë paralele). Në secilin vizatim të shënojë brinjët paralele.

Zgjidhje:

- Pllaka me dy çifte brinjësh të kundërta paralele është paralelogram.
- Pllaka me një çift brinjësh të kundërta paralele është trapez.
- Pllaka pa brinjë paralele është trapezoid.
- Çiftet e brinjëve paralele janë ngjyrosur me të kaltër, të kuqe ose të gjelbër.

**Detyra 3**

Ana dëshiron të rregullojë kopshtin në oborrin e saj. Ajo planifikon të mbjellë lule dhe perime në parcela (ngastra) me forma të ndryshme e që janë katërkëndore. Ja plani që ajo përpiloi:



- I cilit lloj katërkëndëshi është secila prej parcelave në planin e përpiluar të Anës?
- Si mund ajo më lehtë të mat brinjët dhe të caktojë nëse janë ose jo paralele?
- Ana dëshiron të bëjë nga një shteg në secilën parcelë që lidh kulmet e kundërt të parcelës. Si mund të bindet se shtegu do ta ndajë çdo parcelë në dy trekëndësha? Shpjegoni përgjigjen!

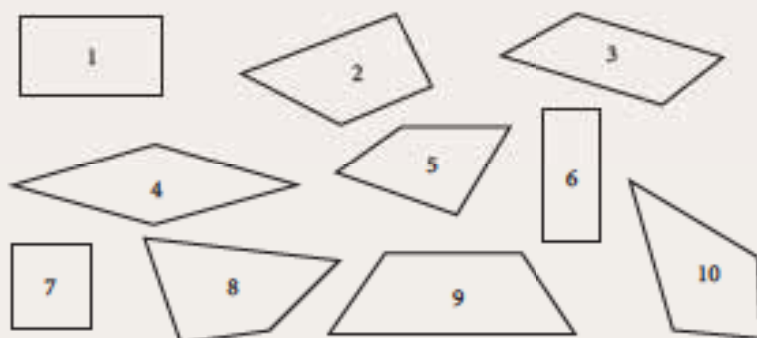
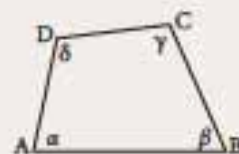
Përpiloni një hartë mendore për katërkëndëshin në të cilën do t'i përfshini gjitha konceptet e mësuara deri më tani për të.

Në fletore, përgjigjuni pyetjeve:

- A i klasifikoj saktë katërkëndëshat sipas çifteve të brinjëve paralele?
 - A i përdor drejt konceptet për katërkëndëshat e llojeve të ndryshme (paralelogram, trapez, trapezoid)?
 - Si do ta vlerësoja të kuptuarit e katërkëndëshave? (Nga 1 deri 5, ku 1 është vlerësimi për plotësisht e pakuptuar, ndërsa 5 për plotësisht e kuptuar).
- Për ato koncepte që nuk je i sigurt kthehu përsëri te njësia mësimore.

Punë e pavarur

- Cilët janë elementet kryesore të katërkëndëshit?
- Në lidhje me katërkëndëshin ABCD shkruani:
 - dy kulme fqinjë
 - dy brinjë fqinje
 - dy kënde të kundërt
- Çka është e saktë?
 - Çdo katërkëndësh ka vetëm një çift kulmesh të kundërt.
 - Çdo katërkëndësh ka vetëm dy çifte brinjësh fqinje.
 - Çdo katërkëndësh ka dy diagonale.
- Klasifikoni katërkëndëshat nga vizatimi sipas çifteve paralele të brinjëve.

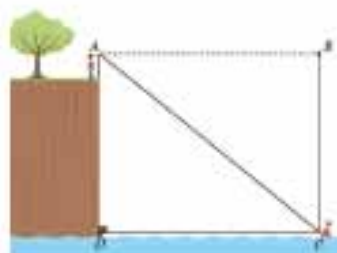


- Vizatoni dy drejtëza paralele m dhe n , e më pas pritni ato me dy drejtëza të tjera paralele l dhe k .
Pikëprerjet e drejtëzave i shënoni me shkronja.
 - Çfarë katërkëndëshi fituat?
 - Emërtoni këndet e brendshme dhe të jashtme të këtij katërkëndëshi.
 - Sa është secili kënd i brendshëm dhe këndi përkatës i jashtëm? Përdorni këndmatësin.
- Vizatoni katërkëndëshin MNPQ dhe tërhiqni diagonalet e tij. Shpjegoni (shkruani) çka është dijagonalja e katërkëndëshit.
- Vizatoni dy drejtëza paralele m dhe n . Në drejtëzën m shënoni dy pika M dhe N, ndërsa në drejtëzën n pikën P. Më pas mbaroni vizatimin e një paralelogrami dhe një trapezi me kulme të përbashkëta M, N dhe P.

Shuma e këndeve të katërkëndëshit

Deri më tani keni hasur katërkëndësha të ndryshëm (paralelograme, trapeze, trapezoide). Edhe pse këta katërkëndësha duken ndryshe, ata kanë një veti të përbashkët – shuma e këndeve të brendshme të tyre është gjithmonë e njëjtë!

Në këtë njësi do të mësoni: Si ta njehsoni shumën e këndeve të cilit do katërkëndësh; Arsyen pse të gjithë katërkëndëshat kanë shumë të njëjtë të këndeve, pa marrë parasysh formën e tyre; Si t'i përdorni këto veti për të zgjidhur detyra dhe probleme nga gjeometria.



Shembulli 1

Arkitekti planifikon të ndërtojë një dritare trekëndore me kënde 65° dhe 75° . Çfarë lloji trekëndëshi është dritarja?

Udhëzim për zgjidhje. Caktoni edhe këndin e tretë të panjohur të trekëndëshit për t'u përgjigjur pyetjes se i cilit lloj është trekëndëshi.

Detyra 1

Trekëndëshi ABC ka njërin kënd $32^\circ 44'$ dhe një tjetër dy herë më të madh se këndi i dhënë. Sa është këndi i tretë i këtij trekëndëshi?

Shembulli 2

Njehsoni shumën e këndeve të katërkëndëshit MNPQ.

Zgjidhje:

Shuma e këndeve të katërkëndëshit është $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Me tërheqjen e diagonales MP në katërkëndëshin MNPQ, ai

ndahet në dy trekëndësha. Nga $\triangle MNP$ kemi

$\angle 1 + \beta + \angle 3 = 180^\circ$, ndërsa nga $\triangle MPQ$ kemi

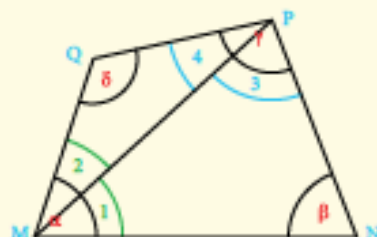
$\angle 2 + \delta + \angle 4 = 180^\circ$ (shuma e këndeve të trekëndëshit).

Nëse këto dy barazime i mbledhim anë për anë, të majtën me të majtën dhe të djathtë me të djathtë, atëherë fitohet:

$\angle 1 + \angle 2 + \beta + \angle 3 + \angle 4 + \delta = 2 \cdot 180^\circ$. Duke marrë zëvendësimet

$\angle 1 + \angle 2 = \alpha$ dhe $\angle 3 + \angle 4 = \beta$, në barazimin e mësipërm,

fitojmë $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.



Në çdo katërkëndësh, shuma e këndeve të brendshme është e barabartë me 360° ose sa këndi i plotë.

Shembulli 3

Gjeni shumën e këndeve të jashtme të katërkëndëshit ABCD.

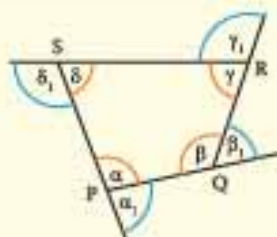
Zgjidhje:

Çdo kënd i brendshëm dhe këndi përkatës i jashtëm formojnë kënd të shtrirë, përkatësisht:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ; \quad \beta + \beta_1 = 180^\circ; \quad \gamma + \gamma_1 = 180^\circ; \quad \delta + \delta_1 = 180^\circ$$

Nëse i mbledhim anë për anë gjitha barazimet e mëparshme, fitojmë $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Pasi $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (shuma e këndeve të brendshme) fitohet se shuma e këndeve të jashtme $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.



Në çdo katërkëndësh, shuma e këndeve të jashtme është e barabartë me 360° ose sa këndi i plotë.

Me fjalë të tjera, shuma e këndeve të brendshme dhe shuma e këndeve të jashtme të katërkëndëshit janë të barabarta dhe kanë masën 360° .

Detyra 2

Tre nga katër këndet e jashtme të katërkëndëshit janë: 72° , 141° dhe 55° . Caktoni këndet e brendshme të katërkëndëshit si dhe këndin e katërt të jashtëm.

Shembulli 4

Ti je një anëtar i ekipit të shkollës që duhet të rregullojë oborrin e shkollës i cili ka formën e katërkëndëshit. Tre këndet e brendshme të oborrit shkollor janë 90° , 110° dhe 89° . Sa është këndi i katërt i brendshëm? Caktoni secilin kënd të jashtëm të katërkëndëshit.

Zgjidhje:

Pasi shuma e këndeve të brendshme e një katërkëndëshi çfarëdo është 360° , ndërsa shuma e tre këndeve të dhëna është $90^\circ + 119^\circ + 89^\circ = 289^\circ$. Këndi i katërt është: $360^\circ - 289^\circ = 71^\circ$.

Këndi i brendshëm bashkë me këndin përkatës të jashtëm formojnë kënd të shtrirë, prandaj për shembull, për këndin e jashtëm që i përgjigjet këndit të brendshëm prej 110° kemi $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Gjeni edhe këndet e tjera të jashtme të katërkëndëshit.

Detyra 3

Në park ka një vazo të madhe në formë të katërkëndëshit me kënde 90° dhe 120° . Sa është shuma e dy këndeve të tjera të vazos?

A ekziston katërkëndësh në të cilin shuma e tre këndeve të brendshme është sa këndi i katërt i brendshëm? A ekziston katërkëndësh te i cili gjitha katër këndet janë të ngushtë?

Përgjigjuni pyetjeve në fletore. Për çështjet për të cilat keni nevojë të përmirësoni të kuptuarit e koncepteve, kthehuni njësisë mësimore rishtas.

1. Çka kam mësuar për këndet e katërkëndëshit?
2. Ku kam vështirësi në të kuptuarit ose zbatimin e asaj çka mësova nga kjo njësi?
3. Çka mund të bëj për të përmirësuar të kuptuarit?

Punë e pavarur

1. Në katërkëndëshin ABCD, $\angle A$ është 75° , $\angle B + \angle C = 210^\circ$. Sa gradë ka këndi $\angle D$?
2. Në një katërkëndësh, tre këndet e jashtme janë: 120° , 80° dhe 100° . Caktoni këndin e katërt të jashtëm.
3. Në një katërkëndësh ABCD, dy këndet e brendshme në kumet A dhe D janë 65° dhe 120° , përkatësisht. Këndi i jashtëm në kulmin C është 70° . Caktoni masat e këndeve të brendshme në kulmet B dhe C.
4. A ekziston katërkëndëshi në të cilin gjitha këndet e brendshme janë më të mëdhenj se 90° ? Shpjegoni përgjigjen.
5. Gjatë matjes së këndeve të një katërkëndëshi është fituar se: $\alpha = 75^\circ 20'$, $\beta = 130^\circ 10'$ dhe $\delta = 160^\circ$. A thua është bërë ndonjë gabim gjatë matjes? Shpjegoni përgjigjen.
6. Në një katërkëndësh dy nga këndet e brendshme janë të barabartë mes veti. Dy këndet tjera janë 70° dhe 120° . Caktoni madhësinë, masën, e këndeve të panjohura.
7. Në një katërkëndësh njëri prej këndeve është 30° , një tjetër është për 13° më i madh, ndërsa i treti është dy herë më i madh se shuma e dy këndeve të para. Caktoni këndet e katërkëndëshit.
- 8.* Njëra nga diagonalet e një parcele në formë katërkëndëshi e ndan parcelën në një trekëndësh barabrinjës dhe një trekëndësh barakrahës kënddrejtë. Caktoni këndet e brendshme të parcelës?
- 9.* Dy kënde fqinj të katërkëndëshit janë 98° dhe 108° . Caktoni këndin ndërmjet simetraleve të këtyre këndeve.

Paralelogrami dhe veti të paralelogramit

Në njësinë paraprake u njohët me një lloj të rëndësishëm të katërkëndëshave – paralelogramin. Paralelogrami është katërkëndësh me dy e nga dy brinjë të kundërta paralele dhe përkatësisht të barabarta. Ky lloj katërkëndëshi ka veti interesante që do t'i hulumtojmë bashkë. Pasi të keni kuptuar vetitë e paralelogramit, do të jeni të aftë t'i zbatoni ato në zgjidhjen e detyrave dhe t'i përdorni në problemet gjeometrike.



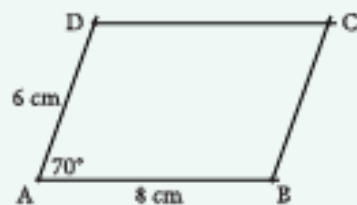
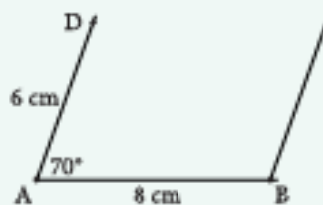
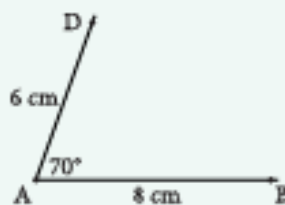
Shembulli 1

Një nga shtigjet e parkut ka formë paralelogrami. Gjatësia e njërës anë të shtegut është 8 metra, ndërsa e anës fqinje është 6 metra. Këndi i ngushtë që zënë anët është 70° . Shtegun vizatoni duke përdorur raport. Cilat karakteristika ka ky paralelogram, që do t'i përdorësh, për ta vizatuar atë?

Zgjidhje:

Vizatimi i paralelogramit – paralelogrami duhet të ketë dy çifte brinjësh të kundërta paralele, përkatësisht. Ndjekim hapat (është përdorur raporti përkatës):

- 1) Vizatojmë dy brinjët me gjatësitë e dhëna që zënë këndin prej 70° dhe kulmet A, B, D.
- 2) Tërheqim prej pikës B gjysmëdrejtëzën paralele me AD.
- 3) Tërheqim prej pikës D gjysmëdrejtëzën paralele me AB.
- 4) Pikëprerjen e dy gjysmëdrejtëzave e shënojmë me C si kulmi i katërt i paralelogramit.

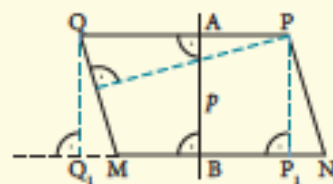


Shembulli 2

Vizatoni lartësinë e paralelogramit.

Zgjidhje:

Në paralelogramin MNPQ është vizatuar drejtëza p normale në brinjët e kundërta MN dhe PQ. Segmenti AB i normales p në këto brinjë quhet lartësi e paralelogramit. Lartësi janë edhe segmentet QQ_1 dhe PP_1 , përkatësisht largësia mes brinjëve paralele është kudo e njëjtë.



Lartësia tjetër e paralelogramit është largësia mes çiftit të brinjëve paralele MQ dhe PN (si për shembull normalja e lëshuar nga kulmi P mbi brinjën QM).

Lartësi e paralelogramit quhet segmenti i pingules së hequr nga kulmi mbi brinjën përballë. Gjatësia e këtij segmenti është e barabartë me distancën mes brinjëve paralele.

Detyra 1

Sa lartësi mund të lëshohen nga një kulm i paralelogramit? Vizatoni një paralelogram çfarëdo. Tërhiqni lartësitë nga njëri kulm.

Pasi paralelogrami është katërkëndësh, shuma e këndeve të brendshme, ashtu edhe ajo e këndeve të jashtme të tij është 360° .

Shembulli 3

Vizatoni më shumë paralelograme të ndryshme. Në secilin prej tyre tërhiqni një rënë nga diagonalet (më të voglën ose më të madhën). Pritni paralelogramet nga letra ku janë vizatuar. Më pas secilin nga paralelogramet e pritni përgjatë diagonales që më parë e keni vizatuar.

- Si janë trekëndëshat që fitohen kur paralelogramin e pritni përgjatë një rënë prej diagonaleve?
- Si janë brinjët e kundërta të paralelogramit?
- Si janë këndet e kundërt të paralelogramit?
- Si janë këndet fqinj të paralelogramit?

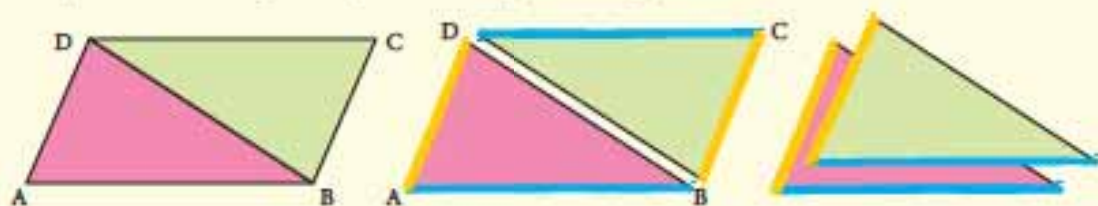
Zgjidhje:

- Kur paralelogrami pritët përgjatë diagonales përkatëse, fitohen dy trekëndësha me formë dhe madhësi të njëjtë.

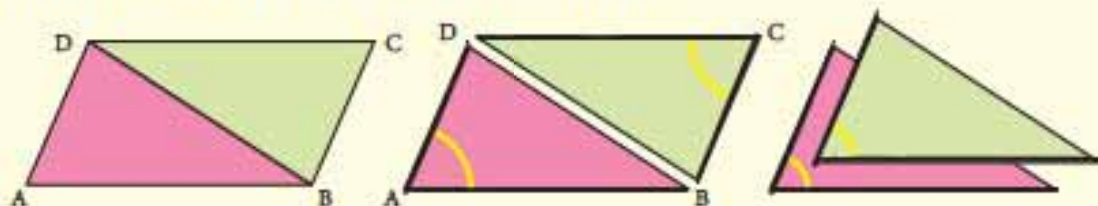


Çdo diagonale e ndan paralelogramin në dy trekëndësja me formë dhe madhësi të njëjtë.

b) Brinjët e kundërta të paralelogramit kanë gjatësi të njëjtë.



c) Këndet e kundërt të paralelogramit kanë masë të njëjta.



Në çdo paralelogram brinjët e kundërta kanë gjatësi të njëjta.
Në çdo paralelogram këndet e kundërta kanë masë të njëjta.

c) Si janë këndet fqinje të paralelogramit?

Për paralelogramin ABCD të vizatimit është dhënë se $AB \parallel CD$ dhe $AD \parallel BC$. Pasi këndet α dhe δ janë të njëanshëm të brendshëm në lidhje me transversalen AD (e cila i pret brinjët paralele AB dhe CD), janë kënde shtues, pra $\alpha + \delta = 180^\circ$ (kjo mund të vërtetohet për çdo dy kënde fqinje).



Në çdo paralelogram këndet fqinje janë shtues.

Detyra 2

Shuma e dy këndeve të kundërta të paralelogramit është 158° .
Njihsoni këndet e paralelogramit.

Shembulli 4

Vizatoni më shumë paralelograme të ndryshme.
Në secilin prej tyre tërhiqni dy diagonalet e tij si në vizatimin e dhënë dhe pikën e prerjes e shënoni me S.
Pritni nëpër diagonale.



- Cilat çifte të trekëndëshave janë të njëjtë në formë dhe madhësi?
- Krahasoni gjatësitë e AS dhe SC si dhe të BS dhe SD!
- Çka mund të përfundoni?

Zgjidhje:

- Kur paralelogramin e presim përgjatë diagonaleve, fitojmë katër trekëndësha. Çiftet e trekëndëshave të njëjtë në formë dhe madhësi janë: $\triangle ASB$ dhe $\triangle CSD$, si dhe $\triangle ASD$ dhe $\triangle CSB$, sipas vizatimit.
- $\overline{AS} = \overline{SC}$ dhe $\overline{BS} = \overline{SD}$.
- Diagonalet e paralelogramit priten në pikën S e cila është edhe pikë e mesit të tyre.

Diagonalet e paralelogramit përgjysmohen me pikëprerjen e tyre.

Detyra 3

Në paralelogramin MNPQ pikëprerja e diagonaleve është pika S. Caktoni gjatësinë e diagonaleve nëse $\overline{SP} = 8,5$ cm dhe $\overline{SQ} = 5,7$ cm.

Shembulli 5

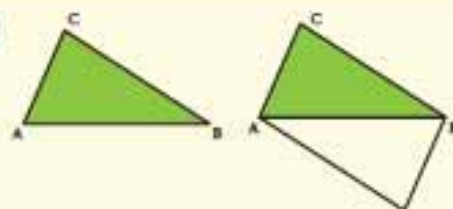
Valbona kishte një varëse formë trekëndore. Ajo e dërgoi varësen tek artari sepse dëshironte ta plotësonte deri në formën e paralelogramit.

- Konstruktioni varësen me të dhënat për trekëndëshin ABC, $\overline{AB} = 2,5$ cm dhe $\overline{AC} = 1,5$ cm dhe këndi mes tyre 60° .
- Vizatimin e fituar për trekëndëshin, plotësoni deri në atë të paralelogramit.
- Sa plotësime të ndryshme, të trekëndëshit deri në paralelogram, mund të bëhen?

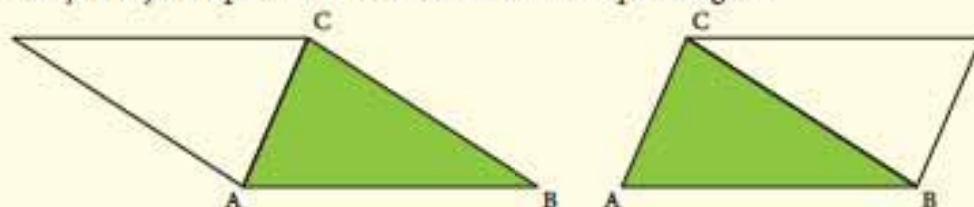
Zgjidhje:

- Nëse duhet, rikujtoni njësine "Konstruktimi i trekëndëshit" për hapat e konstruktimit të trekëndëshit kur janë dhënë dy brinjë dhe këndi mes tyre.

b)

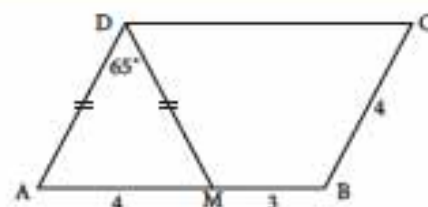


c) Mënyra të tjera të plotësimit të trekëndëshit deri në paralelogram

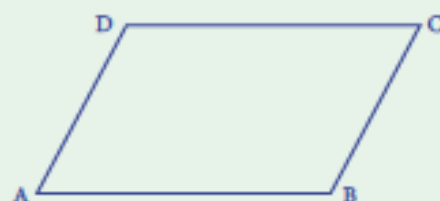


Detyra 4

Në vizatim është dhënë paralelogrami ABCD.
Caktoni këndet dhe brinjët e tij.



A thua paralelogrami ABCD është figurë 2D që posedon simetri boshtore?
Shpjegoni përgjigjen!



Përgjigjuni në fletore.

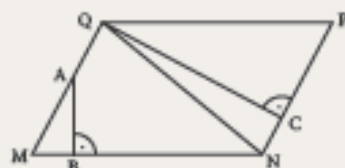
Për pyetjen/pyetjet me përgjigje PO shkruani një shembull, ndërsa për pyetjen/pyetjet me përgjigje JO kthehuni te njësia mësimore dhe shqyrtoni rishtas shembujt përkatës lidhur me pyetjen.

1. Mund t'i numëroj vetitë e paralelogramit? PO/JO
2. Mund t'i zbatoj vetitë e paralelogramit në zgjidhjen e problemeve? PO/JO
3. Si t'i përmirësoj dituritë e mia për vetitë e paralelogramit?

Punë e pavarur

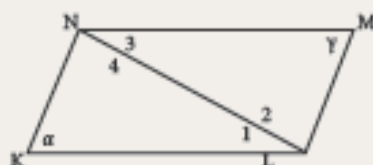
1. Katërkëndëshi MNPQ është paralelogram. Emërtoni cili nga segmentet e vizatuar është:

- a) diagonale e tij
b) lartësi e tij.

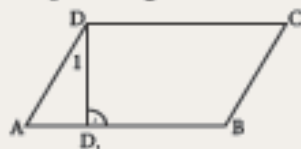


2. Vizatoni paralelogramin ABCD, e më pas nga kulmi D tërhiqni lartësitë.

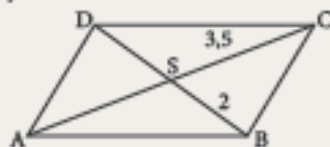
3. Në paralelogramin KLMN, nga vizatimi, është tërhequr njëra diagonale. Çka mund të përfundojmë për $\angle 1$ dhe $\angle 3$, $\angle 2$ dhe $\angle 4$. Shpjegoni përgjigjen.



4. Në paralelogramin ABCD, $\angle 1 = 42^\circ$. Njehsoni masat e këndeve të këtij paralelogrami.

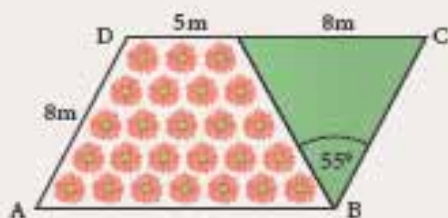


5. Katërkëndëshi ABCD është paralelogram. Gjeni gjatësitë e diagonaleve. Gjatësitë e dhëna janë në cm.



6. Këndi në kulmin M të paralelogramit MNPQ është 106° . Caktoni masat e këndeve të tjerë të paralelogramit.

7. Një arkitekt peizazhi dëshiron të rregullojë një hapësirë oborri në formë paralelogrami të ndarë në dy pjesë: lulishte në formë trapezi dhe barishte në formë trekëndëshi. Oborri duhet të rrethohet me gardh. Për këtë qëllim, na duhen gjatësitë e brinjëve dhe masat e këndeve të oborrit. Duke e shfrytëzuar vizatimin e ofruar, caktoni gjatësitë dhe këndet e kërkuara.



- 8.* Në paralelogramin MNPQ ($\angle Q > 90^\circ$) janë lëshuar lartësitë ndaj brinjëve MN dhe NP. Njehsoni këndet e paralelogramit, nëse këndi mes lartësive të lëshuara është:

- a) 80° b) 45°

Llojet e paralelogrameve dhe vetitë e tyre

Paralelogrami është katërkëndësh me dy e nga dy brinjë të kundërta paralele. Kjo formë 2D është bazike për të kuptuar shumë koncepte të tjera gjeometrike dhe ka zbatim të gjerë në jetën reale, si dhe në sfera të ndryshme të shkencës dhe teknologjisë.

Në këtë njësi do të njiheni me llojet e ndryshme të paralelogrameve. Secili paralelogram ka karakteristikat dhe vetitë e veta me të cilat dallohet nga të tjerët, por që të gjithë i posedojnë vetitë bazike të paralelogramit. Për shembull, brinjët e kundërta gjithmonë janë paralele dhe me gjatësi të njëjta, ndërsa këndet e kundërta janë të barabartë.

Gjatë kësaj njësie do t'i hulumtojmë llojet e paralelogrameve dhe do t'i shkruajmë vetitë e veçanta të tyre. Do të mësoni si t'i dalloni paralelogramet nga format tjera 2D dhe si t'i shfrytëzoni vetitë e tyre në zgjidhjen e detyrave dhe të problemeve.



Shembulli 1

Analizoni secilin vizatim, veçmas, dhe përgjigjuni pyetjeve:

Dy drejtëza $a \parallel b$ priten me dy drejtëza të tjera paralele $c \parallel d$, por ashtu që $a \perp c$.	
Dy drejtëza $a \parallel b$ priten me dy drejtëza të tjera paralele $c \parallel d$ por largësia mes drejtëzave a dhe b është sa largësia mes drejtëzave c dhe d .	
Dy drejtëza $a \parallel b$ priten me dy drejtëza të tjera paralele $c \parallel d$, $a \perp c$ dhe largësia mes c dhe d është sa largësia mes a dhe b .	

- A janë paralelograme këto katërkëndësha? Pse?
- Çfarë këndesh ka secili paralelogram?
- Çfarë brinjësh ka secili paralelogram?

Zgjidhje:

Katërkëndëshi në vizatimin e parë është paralelogram, ka dy e nga dy brinjë të kundërta paralele dhe çdo çift brinjësh paralele kanë gjatësi të barabarta. Gjitha këndet janë të drejta.

Paralelogrami në të cilin gjitha këndet janë të drejta quhet drejtkëndësh.

Katërkëndëshi në vizatimin e dytë është paralelogram, ka dy e nga dy brinjë të kundërta paralele dhe këndet e kundërta janë të barabarta. Te ky paralelogram gjitha brinjët janë me gjatësi të njëjta.

Paralelogrami në të cilin gjitha brinjët janë të barabarta quhet romb.

Katërkëndëshi në vizatimin e tretë është paralelogram, ka dy e nga dy brinjë të kundërta paralele dhe gjitha këndet janë të drejtë. Gjitha brinjët kanë gjatësi të barabarta.

Paralelogrami me gjitha brinjët e barabarta dhe gjitha këndet e drejta quhet katror.

Shpesh paralelogramin që nuk është drejtkëndësh dhe nuk është romb e quajmë romboid.

Detyra 1

Pikat P, Q, R dhe S të paralelogramit ABCD le të jenë pikat e mesme të brinjëve AB, BC, CD dhe DA, përkatësisht. Bëni një vizatim, analizoni dhe përgjigjuni se ç'loj i katërkëndëshit është katërkëndëshi PQRS.

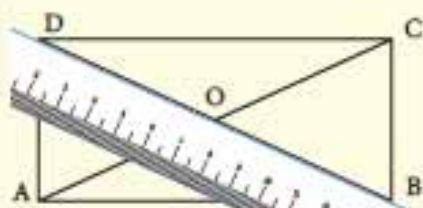
Shembulli 2

Vizatoni në fletore sipas hapave vijues:

- Vizatoni tre drejtkëndësha të ndryshëm.
 - Në çdo drejtkëndësh tërhiqni diagonalet dhe pikën prerëse të tyre e shënoni me O.
- Njehsoni gjatësinë e diagonaleve në çdo drejtkëndësh dhe merrni shënim sa është ajo. Çka mund të përfundojmë?
 - Vendosni majën e kompasit në pikën prerëse të diagonaleve të secilit drejtkëndësh dhe hapni atë deri te njëri prej kulmeve. Çfarë vije rrethore mund të vizatoni?
 - Nëse një paralelogram ka diagonale të barabarta, a mund të përfundojmë se është drejtkëndësh? Shpjegoni përgjigjen!

Zgjidhje:

a)



b)



Nëse keni vizatuar saktë dhe preciz, atëherë do të fitoni vetitë vijuese të drejtkëndëshit:

Në çdo drejtkëndësh dy diagonalet janë të barabarta mes veti. Përreth çdo drejtkëndëshi mund të jashtashkruhet vija rrethore me qendër në pikëprerjen e diagonaleve.

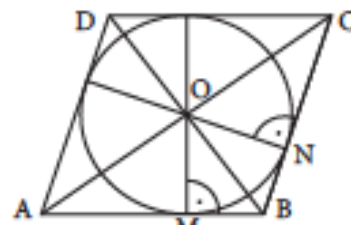
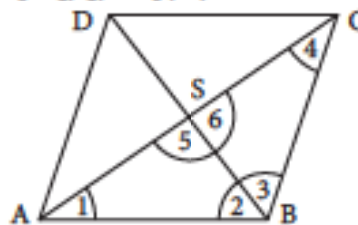
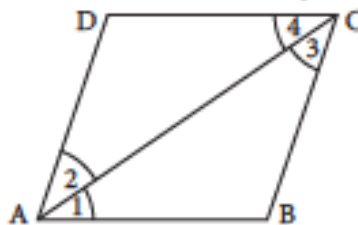
Nëse diagonalet e një paralelogrami janë të barabarta, atëherë ai paralelogram është drejtkëndësh.

Detyra 2

Paralelogrami, a është formë 2D që posedon simetri boshtore? Shpjegoni përgjigjen!

Shembulli 3

Analizoni vizatimet në vijim dhe përgjigjuni pyetjeve lidhur me vetitë e rombit:



- a) Pse $\angle 1 = \angle 1 = \angle 1 = \angle 4$? Çka përfaqëson diagonalja AC për këndin $\angle A$ dhe $\angle C$? Përfundimi i njëjtë a vlen edhe për diagonalen tjetër?

Diagonalet e rombit janë simetrale të këndeve të kundërta.

- b) Pse $\triangle ABS$ dhe $\triangle CBS$ kanë formë dhe madhësi të njëjtë? Shkruani çiftet e këndeve që mes veti janë të barabarta. Sa është shuma e masave të $\angle 5$ dhe $\angle 6$? Pse $\angle 5$ dhe $\angle 6$ kanë nga 90° ? Çfarë këndi mes veti formojnë diagonalet AC dhe BD?

Në çdo romb diagonalet janë reciprokisht normale (pingule).

- c) Rombi, a është formë 2D me simetri boshtore? Shpjegoni përgjigjen!

Çdo romb është formë 2D me simetri boshtore me dy boshte simetrie, edhe atë simetralet e këndeve të kundërta.

- ç) Rikujtoni vijën rrethore të brendashkruar trekëndëshit. Me anë të vizatimit të tretë të dhënë më sipër shpjegoni se pse në romb mund të brendashkruhet vijë rrethore.

Në çdo romb mund të brendashkruhet vijë rrethore me qendër në pikëprerjen e diagonaleve.

Detyra 3

Nëse në një paralelogram diagonalet janë reciprokisht normale (pingule), atëherë ai është romb. Shpjegoni pse!

Nëse në një paralelogram diagonalet janë reciprokisht normale, atëherë ai është romb.

Pasi çdo katror është drejtkëndësh me brinjë të barabarta ose romb me kënde të drejta, gjitha vetitë që vlejné për drejtkëndëshat dhe rombet vlejné edhe për katrorët.

Detyra 4

Vizatoni një katror dhe tërhiqni diagonalet e tij. Më pas bëni matjet e nevojshme dhe kontrolloni vërtetësinë e përfundimit të mësipërm se për katrorin vlejné gjitha vetitë që vlejné për drejtkëndëshin dhe për rombin.

Në çdo katror diagonalet janë të barabarta dhe reciprokisht normale.

Shembulli 4

Ana dhe Bojani dëshirojnë të bëjnë një kornizë për fotografi me dimensione 40 cm me 30 cm. Ata kanë vetëm shkophtha të drurit që mund t'i presin dhe dëshirojnë të sigurohen që korniza do të jetë drejtkëndore. Si mund të kontrollojnë nëse korniza e tyre është ndërtuar siç duhet duke përdorur vetitë e paralelogrameve?

Zgjidhje:

Ana dhe Bojani fillimisht bëjnë kornizën me dimensionet 40 cm me 30 cm, ashtu që dy brinjët më të gjata janë paralele dhe të barabarta, ndërsa dy brinjët më të shkurta janë paralele dhe të barabarta. Për të provuar nëse korniza është drejtkëndore, ata do t'i tërheqin diagonalet nga kulmet e kundërta (nga kulmi i majtë sipër në kumin e djathtë poshtë dhe nga kulmi i djathtë sipër në kulmin e majtë poshtë).

Më pas, me vizore do t'i matin diagonalet.

Nëse diagonalet janë të barabarta, atëherë korniza është drejtkëndore.

Nëse diagonalet nuk janë të barabarta, kjo do të thotë se korniza është e pjerrët dhe duhet ta korrigjojnë, ashtu që brinjët përsëri do të jenë paralele dhe të barabarta për nga gjatësia.

Kjo metodë nuk përdoret vetëm për përpunimin e kornizave, por edhe për kontrollin nëse dritaret janë të vendosura nën kënd të drejtë, dyert, tavolinat ose objekte tjera drejtkëndore nga përditshmëria.

Detyra 5

Vizatoni katrorin ABCD. Tërhiqni diagonalet dhe simetralet e brinjëve.

- Çka ndodh me prerjen e diagonaleve dhe prerjen e simetrave të brinjëve?
- Vendosni majën e kompasit në prerjen e diagonaleve. Sa vija rrethore mund të vizatoni? Emërtoni secilën vijë rrethore dhe shënoni rrezen dhe qendrën e saj.

Çdo katror ka vijë rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar me qendër të përbashkët (prerjen e diagonaleve)

A thua katrori është formë 2D me simetri boshtore? Shpjegoni përgjigjen!

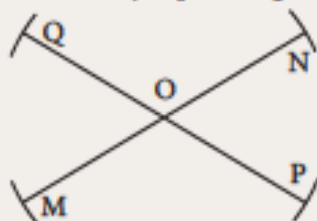
Përgjigjuni në fletore pyetjeve në vijim për të vlerësuar sa e keni përvetësuar materialin e njësise mësimore:

- A mund të dalloj dhe emërtoj gjitha llojet e paralelogrameve (drejtkëndësh, katror, romb, romboid)?
- A mund saktë të përshkruaj vetitë e tyre (brinjë të barabarta, këndet, diagonalet)?
- A mund të shpjegoj si dallojnë drejtkëndëshi, katrori, rombi dhe romboidi?
- A mund të zgjidh probleme në të cilët përdoren vetitë e paralelogrameve?

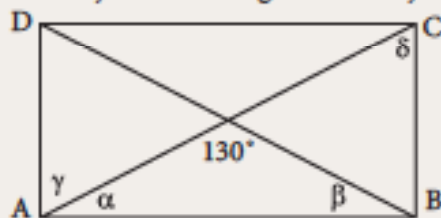
Plotësoni përgjigjen me shembull ose vizatim. Përgjigjet ndaj me shokët e klasës.

Punë e pavarur

1. Në rombin ABCD pikat A_1 , B_1 , C_1 dhe D_1 , janë meset e brinjëve AB, BC, CD dhe DA përkatësisht. Çfarë paralelogrami fitohet me lidhjen e këtyre pikave?
2. a) Çka është drejtkëndëshi?
b) Çka është rombi?
3. Segmentet MN dhe PQ, në vizatim, janë të barabarta. Ata përgjysmohen në pikën prerëse O dhe formojnë paralelogramin MNPQ. A është drejtkëndësh? Pse



4. Shkruani vetitë e përbashkëta të katrorëve dhe rombeve.
5. Për drejtkëndëshin nga vizatimi njehsoni këndet e shënuara.



6. Numëroni vetitë e përbashkëta të katrorit dhe drejtkëndëshit. Në çka dallojnë ata?
7. Në rombin ABCD këndi mes diagonales më të vogël dhe brinjës është 56° . Njehsoni këndet e rombit.
- 8.* Në punëtorinë e marangozit ndërtojnë një pjesë mobileje prej druri – mbajtëse televizori. Mbajtësja duhet të ketë formë rombi diagonalja më e shkurtë e të cilit është sa brinja e rombit. Për funksionalitetin sa më të mirë të mbajtëses, duhet të instalohet një pjesë tjetër në formë rrethore që do ta prek secilën brinjë të rombit. Bëni një vizatim me anë të të cilit plotësisht do ta paraqitni dizajnin e mbajtëses. Caktoni këndet e rombit.

Simetria boshtore në sistemin koordinativ

Simetria boshtore është pasqyrim në rrafsh kur një formë, përmes rregullës së dhënë, pasqyrohet përmes drejtëzës së quajtur bosht i simetrisë, kështu që origjinali dhe fytyra e tij duken identike, si fytyrë pasqyre. Në këtë njësi do të mësoni se si ta caktoni vendndodhjen e formës 2D në sistemin koordinativ (sistemin e koordinatave) dhe si ta krahasoni fytyrën dhe origjinalin gjatë pasqyrit. Po ashtu, do të zgjidhni probleme interesante për simetrinë boshtore, që do t'u ndihmojë të kuptoni se si ta përdorni këtë fenomen në jetën e përditshme, art dhe shkencë.

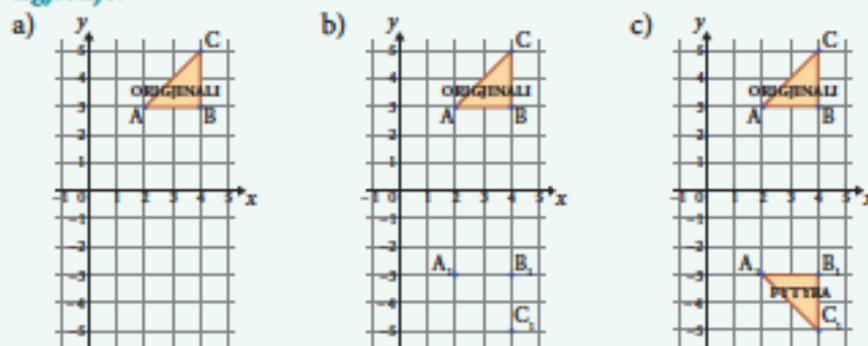


Shembulli 1

Vizatoni sistemin koordinativ dhe veproni sipas kërkesave në vijim:

- Vizatoni trekëndëshin $\triangle ABC$ në sistemin koordinativ. Kulmet kanë koordinatat $A(2,3)$, $B(4,3)$ dhe $C(4,5)$.
- Caktoni pikat A_1 , B_1 dhe C_1 simetrike me pikat A , B dhe C të trekëndëshit në lidhje me boshtin x .
- Cilat janë koordinatat e trekëndëshit $A_1B_1C_1$?

Zgjidhje:



- Koordinatat e kulmeve të fytyrës së trekëndëshit ABC janë:
 $A_1(2, -3)$; $B_1(4, -3)$ dhe $C_1(4, -5)$.

Detyra 1

Vizatoni sistem koordinativ dhe veproni sipas kërkesave në vijim:

- Vizatoni drejtkëndëshin $PQRS$ në sistemin koordinativ, kulmet e të cilit kanë koordinatat:
 $P(-3,1)$, $Q(-3,4)$, $R(-6,4)$ dhe $S(-6,1)$.

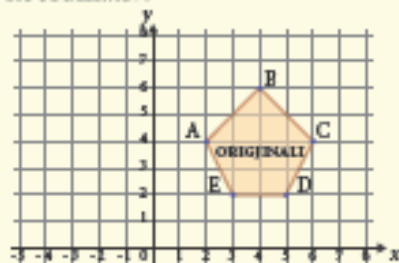
- b) Vizatoni fytyrën e drejtkëndëshit PQRS gjatë simetrisë boshtore me bosht simetrie boshtin y .
 c) Caktoni koordinatat e kulmeve të drejtkëndëshit të ri $P_1Q_1R_1S_1$.

Shembulli 2

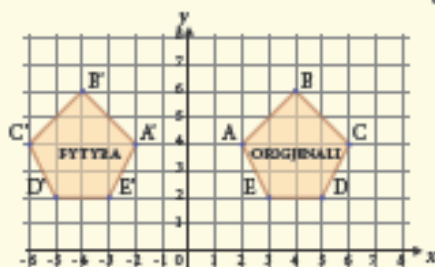
- a) Vizatoni pesëkëndëshin në sistemin koordinativ nëse kulmet e tij janë: $A(2, 4)$, $B(4, 6)$, $C(6, 4)$, $D(5, 2)$, $E(3, 2)$.
 b) Caktoni fytyrën e pesëkëndëshit ABCDE gjatë simetrisë boshtore me bosht simetrie boshtin y . Shkruani koordinatat e fytyrës të secilit kulm të pesëkëndëshit ABCDE.

Zgjidhje:

- a) Filloni me futjen e koordinatave të secilit kulm të pesëkëndëshit ABCDE në sistemin koordinativ:



- b) Zbatimi i simetrisë boshtore mbi origjinalin



Koordinatat e reja të kulmeve janë:

$A(2, 4) \rightarrow A_1(-2, 4)$, $B(4, 6) \rightarrow B_1(-4, 6)$, $C(6, 4) \rightarrow C_1(-6, 4)$, $D(5, 2) \rightarrow D_1(-5, 2)$ dhe $E(3, 2) \rightarrow E_1(-3, 2)$

Fytyra e pesëkëndëshit është simetrike me origjinalin në lidhje me boshtin y , që do të thotë se koordinata në boshtin x për çdo kulm do të ndryshojë dhe do të merr vlerën e kundërt (nëse është pozitive, do të bëhet negative dhe anasjelltas), përderisa koordinata y do të mbetet e pandryshuar.

Gjatë kësaj simetrie boshtore fytyrat e kulmeve të pesëkëndëshit janë në anën e kundërt të boshtit y , por në distancë të njëjtë prej saj ashtu si kulmet e origjinalit.

Pyetje shtesë:

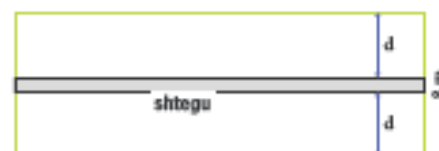
- a) Çka do të ndodh me pesëkëndëshin ABCDE gjatë simetrisë boshtore me bosht simetrie boshtin x ?
 b) Çfarë ndryshime do të bëhen në koordinatat e pesëkëndëshit nëse boshti i simetrisë është drejtëza që kalon nëpër pikën $E(0, 1)$ dhe është paralele me boshtin x ?

Detyra 2

- Vizatoni gjashtëkëndëshin ABCDEF në sistemin koordinativ, me koordinatat: A(2, 6), B(4, 7), C(6, 5), D(5, 3), E(3, 3), F(2, 4).
- Caktoni fytyrën e gjashtëkëndëshit ABCDEF gjatë simetrisë boshtore me bosht simetrie boshtin y. Shkruani koordinata e fytyrës së secilit kulm të gjashtëkëndëshit ABCDEF.
- Çfarë ndryshime ndodhin në koordinatat e fytyrës së gjashtëkëndëshit?
- * Pa vizatuar, përpiku të përgjigjesh cilat do të ishin koordinatat x të secilit kulm të gjashtëkëndëshit ABCDEF gjatë simetrisë boshtore në lidhje me drejtëzën që kalon nëpër pikën F(-3, 0) dhe është paralele me boshtin y.

Shembulli 3

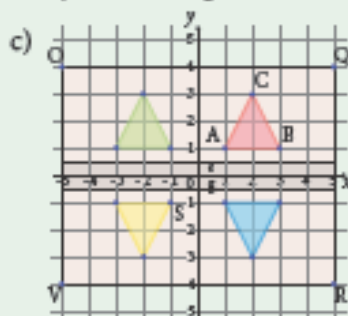
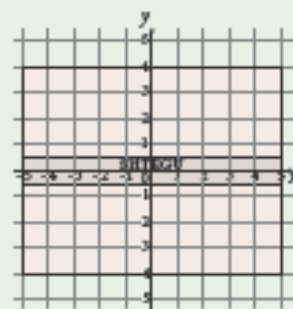
Je një arkitekt që duhet të projektojë një plan për rregullimin e oborit me dizajn simetrik. Në oborr duhet të vendosen katër ngastra të mëdha me lule në forma të trekëndëshave. Ngastrat janë shpërndarë ashtu që secila është simetrike në lidhje me shtegun që kalon nëpër oborr.



- Cilin bosht të sistemit koordinativ do ta zgjidhje sipas shtegut nga vizatimi i dhënë?
- Përzgjidh koordinatat e kulmeve të njëres nga ngastrat e luleve në formë trekëndëshi.
- Vizato oborrrin me dizajn simetrik.

Zgjidhje:

- Më mirë dhe më thjeshtë për vizatim do të ishte nëse përzgjedhim boshtin x të sistemit koordinativ të përputhet me shtegun e dhënë në vizatim. Mirëpo, në oborr boshti x duhet të kalojë mepër shtegut. Pse? Në çka duhet të bësh kujdes gjatë vizatimit të boshtit y? Sa i gjatë është shtegu?
- Ngastra e parë e luleve le të jetë në kuadrantin e parë, edhe atë trekëndëshi ABC me kulme A(1, 1), B(3, 1) dhe C(2, 3). Në çka duhet të bësh kujdes gjatë përzgjedhjes së koordinatave të kulmeve të trekëndëshit? Cila është vlera më e madhe dhe më e vogël e mundshme, përkatësisht, në boshtin x dhe boshtin y në një kulm të ngastrës së luleve nga kuadranti i parë? Shpjegoni përgjigjen!



Detyra 3

Vera dëshiron të vendos katër pasqyra në murin e sallorit të saj të kozmetikës. Gjatë kësaj duhet të përmbushen kushtet në vijim:

1. Pasqyrat të kenë formë katrori.
 2. Diagonalja e njëres prej pasqyrave duhet të jetë normale (pingule) me tehun e dyshemesë.
 3. Për një pasqyrë tjetër brinja të jetë paralele me tehun e dyshemesë.
- a) Bëni shpërndarjen tuaj të pasqyrave në sistemin koordinativ duke përdorur simetrinë boshtore.
- b) Si mund të fitosh kompozim të pasqyrave, ashtu që, për shembull, në kuadrantin e parë dhe të dytë të sistemit koordinativ është pasqyra diagonalja e së cilës është normale në boshtin x , ndërsa në kuadrantin e tretë dhe të katërt janë pasqyrat brinja e së cilave është paralele me boshtin x .

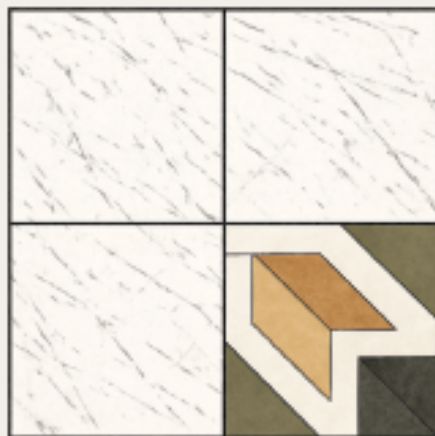
Si mund ta përdorni simetrinë boshtore për të zgjidhur probleme reale? A mund të përmendni shembull konkret nga jeta e përditshme ku simetria luan rol të rëndësishëm?

Në secilën pyetje përgjigjet jepi në fletore. Për përgjigjet Po shkruani shembull, për përgjigjet Pjesërisht dhe Jo shpjegoni pse.

1. A mund saktë t'i lexoj koordinatat e pikës pas simetrisë në lidhje me boshtin e dhënë?
☐ Po ☐ Pjesërisht ☐ Jo
2. A mund të caktoj fytyrën gjatë simetrisë boshtore të shumëkëndëshit në sistemin koordinativ?
☐ Po ☐ Pjesërisht ☐ Jo
3. A e kuptoj se si ta zbatoj simetrinë boshtore në situata reale (sikurse në shembullin me pozicionimin e pasqyrave etj.)?
☐ Po ☐ Pjesërisht ☐ Jo
4. Çka mund të bëj që të përvetësoj më mirë këtë material?
 (Shkruaj një përgjigje të shkurtë).

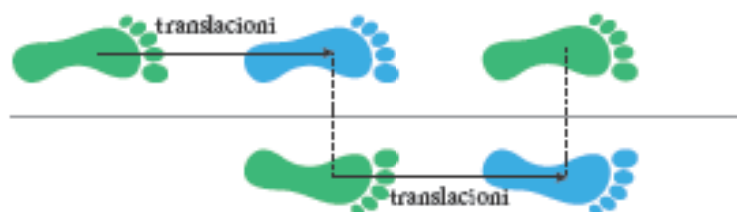
Punë e pavarur

1. Parku i qytetit ka pishinë drejtkëndore dimensionet e së cilës janë dhënë në sistem koordinativ. Kulmet e pishinës janë $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, -1)$ dhe $D(2, -1)$. Planifikoni një aranzhman simetrik me lule të pishinës në lidhje me boshtin y dhe caktoni koordinatat e aranzhmanit me lule.
2. Gjatë prodhimit të posterit për një ngjarje duhet të dizajnohet një element simetrik në formë të trekëndëshit me kulme $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(2, 1)$. Vizatoni trekëndëshin dhe fytyrën e tij në lidhje me simetrinë në raport me boshtin x .
3. Nëse me pikat $A(3, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, -1)$ dhe $D(3, -1)$ është caktuar vendndodhja e pasqyrës, caktoni koordinatat e fytyrës së saj gjatë simetrisë boshtore në lidhje me drejtëzën që kalon nëpër pikën $M(0, -3)$ dhe është paralele me boshtin x .
- 4.* Kopshti ka një aranzhman qendror me lule në formë të rrethit qendra e të cilit është në pikën $(4, 2)$, ndërsa rrezja është 2 njësi. Planifikoni një rreth simetrik në lidhje me boshtin x , shkruani koordinatat e qendrës dhe përshkruani pozicionin e ri.
5. Dritarja ka formën e katrorit me kulme $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$ dhe $D(1, 3)$. Gjeni koordinatat e fytyrës së saj pas simetrisë boshtore në lidhje me drejtëzën e cila kalon nëpër pikën $K(2, 0)$ dhe është paralele me boshtin y .
6. Dyshemeja e banjës është paraqitur me sistem koordinativ. Nëse një pllakë është drejtkëndësh me kulme $A(-2, -1)$, $B(0, -1)$, $C(0, -3)$ dhe $D(-2, -3)$, atëherë caktoni koordinatat e pllakës simetrike në lidhje me boshtin y .
- 7.* Gjatë restaurimit të një dyshemeje në një objekt antik arkeologët kanë vërejtur se janë përdorur pllakëza dizajni i të cilave është simetrik në raport me dy drejtëza reciprokisht normale që janë dhënë në vizatim. Ata duhet të zbulojnë mostrën fillestare të pllakëzës, por pjesë të saj janë copëtuar ose janë fshirë. Përdorni vizatimin dhe ndihmoni arkeologët ta vizatojnë mostrën fillestare të pllakëzave që kanë qenë përdorur shumë kohë më parë.



Translacioni në sistemin koordinativ

Translacioni është zhvendosje e formës 2D pa ndryshuar trajtën ose madhësinë e saj. Gjatë translacionit, çdo pikë e formës 2D zhvendoset në drejtim të njëjtë dhe për largësi të njëjtë. Qëllimi i kësaj njësie është të mësoni se si t'i përcaktoni koordinatat e reja të pikave të shumëkëndëshit me translacion, ta dalloni origjinalin dhe fytyrën e shumëkëndëshave dhe të zgjidhni probleme matematikore që përfshijnë translacionin.

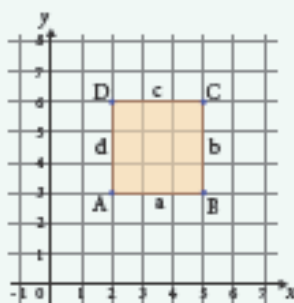


Shembulli 1

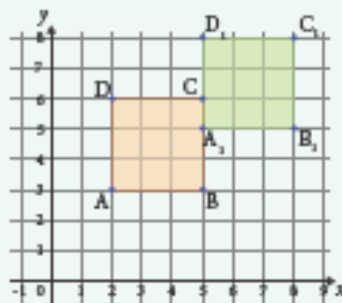
- Në sistemin koordinativ vizatoni shumëkëndëshin me kulme $A(2, 3)$, $B(5, 3)$, $C(5, 6)$ dhe $D(2, 6)$.
- Kryeni translacionin e këtij shumëkëndëshi ashtu që secila pikë të zhvendoset për 3 njësi nëpër boshtin x djathtas dhe 2 njësi nëpër boshtin y përsipër.
- Caktoni koordinatat e kulmeve të fytyrës që fitohet pas translacionit.

Zgjidhje:

a)



b)



- Nga sistemi koordinativ mund të lexojmë koordinatat e kulmeve të fytyrës që fitohet pas translacionit të shumëkëndëshit $ABCD$: $A_1(5, 5)$, $B_1(8, 5)$, $C_1(8, 8)$ dhe $D_1(5, 8)$

Detyra 1

Në sistemin koordinativ është dhënë një pesëkëndësh me koordinatat në vijim të kulmeve: $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(5, 5)$, $D(3, 7)$ dhe $E(1, 6)$. Kryeni translacionin e pesëkëndëshit ashtu që çdo kulm i tij të zhvendoset 4 njësi djathtas dhe 3 njësi përsipër. Cilat do të jenë koordinatat e reja të kulmeve të pesëkëndëshit të fituar me translacion?

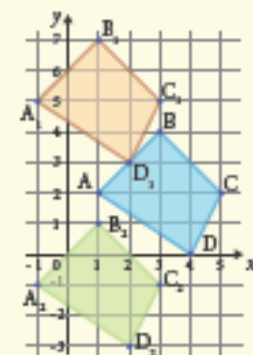
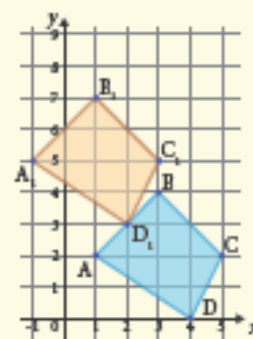
Shembulli 2

Është dhënë një shumëkëndësh në sistem koordinativ me koordinatat në vijim të kulmeve: $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$ dhe $D(4, 6)$. Kryeni translacionin e këtij shumëkëndëshi ashtu që çdo pikë do të zhvendoset për 2 njësi majtas dhe 3 njësi përsipër.

- Caktoni koordinatat e kulmeve të fytyrës së shumëkëndëshit ABCD pas translacionit.
- Përshkruani ndryshimin e koordinatave të çdo pike (originalin dhe fytyrën). Cilat janë dallimet mes koordinatave të origjinalit dhe fytyrës?
- Si do të ndryshonin koordinatat nëse translacioni do të kryhej në kahen e kundërt (për shembull, 2 njësi majtas dhe 3 njësi përposhtë)? Kryeni translacionin e ri dhe caktoni koordinatat.
- Në vend se të lexoni koordinatat e kulmeve të fytyrës së fituar pas translacionit të shumëkëndëshit ABCD, shkruani si do ta njehsoni translacionin 2 njësi majtas dhe 3 njësi përposhtë.
- Shpjegoni kuptimin e fjalëve "origjinali" dhe "fytyra" në kontekst të translacionit. Si i identifikoni këto kuptime në sistemin koordinativ?
- Zgjidhni problemin në vijim me translacion: Nëse ke pikat tjera $P(2, 3)$ dhe $Q(5, 6)$, ndërsa translacioni duhet të jetë 1 njësi djathtas dhe 4 njësi përsipër, cilat do të jenë koordinatat e pikave të fituara?

Zgjidhje:

- Nga sistemi koordinativ mund të lexoni koordinatat e fytyrës së shumëkëndëshit ABCD gjatë translacionit 2 njësi majtas dhe 3 njësi përsipër: $A_1(-1, 5)$; $B_1(1, 7)$; $C_1(3, 5)$ dhe $D_1(2, 3)$.
- Ndryshimi i koordinatave të çdo pike qëndron në shtimin e 2 njësi majtas dhe 3 njësi përsipër. Për shembull: për pikën $A(1, 2)$, pika e re $A_1(-1, 5)$ ka koordinatë që zvogëlohet për 2 nëpër boshtin x dhe që zmadhohet për 3 nëpër boshtin y . Ndryshimi i njëjtë paraqitet në gjitha pikat e shumëkëndëshit.
- Nëse translacioni është për 2 njësi majtas dhe 3 njësi përposhtë, koordinatat x të fytyrës do të ishin të njëjta si në translacionin e parë, mirëpo në këtë rast koordinata y e secilës pikë nuk rritet, por zvogëlohet për 3 njësi, përkatësisht kemi: $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$ dhe $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.
- Meqenëse në këtë rast translacioni i shumëkëndëshit ABCD është 2 njësi majtas dhe 3 njësi përposhtë kemi: koordinatat x të shumëkëndëshit $A_2B_2C_2D_2$ janë për 2 njësi më të vogla se sa koordinatat x të shumëkëndëshit ABCD, ndërsa koordinatat y të shumëkëndëshit $A_2B_2C_2D_2$ janë për 3 njësi më të vogla se koordinatat y të origjinalit. Përkatësisht $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$ dhe $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.



d) Në kontekst të translacionit:

Originali: Shumëkëndëshi i ka koordinatat e kulmeve përpara se të zbatohet translacioni mbi të. Ata shënojnë pozicionin fillestar të shumëkëndëshit në sistemin koordinativ.

Fytyra: Shumëkëndësh i ri me koordinata të reja të kulmeve pas translacionit, kur shumëkëndëshi është zhvendosur në vendndodhjen e re. Fytyra tregon pozicionin e shumëkëndëshit pas translacionit.

Në sistemin koordinativ origjinali është paraqitur me pikat në pozicionin fillestar, ndërsa fytyra me pikat në pozicionin e ri, pas kryerjes së translacionit.

dh) Translacioni i pikave $P(2, 3)$ dhe $Q(5, 6)$ për 1 njësi djathtas dhe 4 njësi përsipër do t'i jep koordinatat e reja: $P(2, 3) \rightarrow P_1(3, 7)$ dhe $Q(5, 6) \rightarrow Q_1(6, 10)$. Shpjegoni si janë fituar koordinatat e P_1 dhe Q_1 .

Detyra 2

Është dhënë një gjashtëkëndësh me koordinatat e kulmeve të tij: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, 2)$, $D(7, 4)$, $E(5, 6)$ dhe $F(3, 5)$. Translacioni është dhënë me 3 njësi djathtas dhe 2 njësi përposhtë.

- Caktoni koordinatat e kulmeve të fytyrës së gjashtëkëndëshit, pas translacionit.
- Shpjegoni ndryshimin e koordinatave të secilit kulm (originalit dhe fytyrës) gjatë translacionit. Si ndryshojnë koordinatat e kulmeve pas translacionit?
- Me vizore matni gjatësinë e secilës brinjë të gjashtëkëndëshit origjinal, e më pas krahasoni në gjatësitë e brinjëve përkatëse të gjashtëkëndëshit të fituar pas translacionit. Translacioni a e ndryshon distancën mes pikave?
- * Si do të ndryshonin koordinatat nëse translacioni do të ishte 3 njësi majtas dhe 4 njësi përsipër? Pa e kryer translacionin, përcaktoni cilat do të jenë kulmet e fytyrës së origjinalit?

Shembulli 3

Ana punon në kompani për transport të kutive. Ajo duhet të njehsojë lokacionin e ri të dy kutive që janë në pozicione të ndryshme të magazinës. Kur pranon dërgesën e re, ajo duhet të zhvendos dy kuti me translacion të njëjtë. Pozicionet fillestare të kutive janë dhënë me koordinatat: kutia 1: $A(2, 3)$ dhe kutia 2: $B(5, 4)$. Translacioni që duhet të kryejë është zhvendosje djathtas për 6 njësi dhe përsipër për 2 njësi.

- Cilat do të jenë koordinatat e reja të kutive pas zhvendosjes?
- Shpjegoni se si njehsohen koordinatat e reja pas translacionit të kutive.
- Çka do të ndodh me distancën mes kutie A dhe B para dhe pas translacionit?

Zgjidhje:

a) Koordinatat e reja të kutive: Për të fituar koordinatat e reja të kutive, duhet që në koordinatën x të pikave të shtojmë 6, ndërsa në koordinatën y të tyre të shtojmë 2. Kjo për shkak se kemi translacionin për 6 njësi djathtas dhe 2 njësi përsipër.

Për kutinë 1, nga pozicioni në pikën me koordinatat $A(2, 3)$ pas translacionit do të gjendet në pikën me koordinatat $A_1(8, 5)$.

Për kutinë 2, nga pozicioni në pikën me koordinatat $B(5, 4)$ pas translacionit do të gjendet në pikën me koordinatat $B_1(11, 6)$.

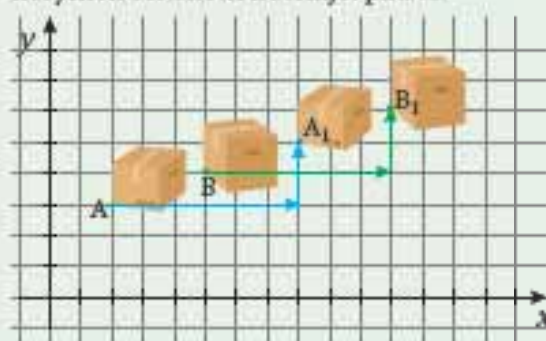
b) Koordinatat e reja të kutive A dhe B pas translacionit:

Në koordinatën x të secilës kuti shtojmë 6 (për shkak të zhvendosjes nëpër boshtin x , djathtas).

Në koordinatën y të secilës kuti shtojmë 2 (për shkak të zhvendosjes nëpër boshtin y , përsipër).

Këto ndryshime zbatohen në secilën pikë (kuti) për të fituar pozicionin e ri pas translacionit.

c) Distanca mes kutive e mbetet e njëjtë para dhe pas translacionit sepse translacioni nuk ndryshon distancën ndërmjet pikave.



Translacioni i kutive e ndryshon pozicionin e tyre, por e ruan distancën mes pikave përkatëse të fytyrës dhe origjinalit.

Translacioni e ruan largësinë.

Detyra 3

Toni, i cili punon si menaxher i parkingut – garazh, duhet të njehsojë shpërndarjen e re të automobilave pas translacionit. Automobilat që janë në garazh duhet të zhvendosen për të krijuar më shumë vend të lirë për makinat e reja.

Koordinatat fillestare të automobilave në garazh:

Automobili 1: $A(1, 2)$,

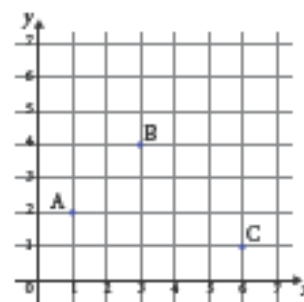
Automobili 2: $B(3, 4)$,

Automobili 3: $C(6, 1)$.

Toni duhet t'i zhvendos automobilat 2 njësi djathtas dhe 3 njësi përsipër.

a) Si do të jenë koordinatat e reja të automobilave pas translacionit?

b) Shpjegoni se si njehsohen koordinatat e reja të automobilave.



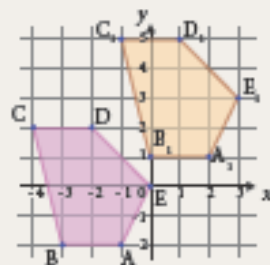
Translacioni i pikave në sistemin koordinativ si ndikon mbi objektet gjeometrike sikurse janë shumëkëndëshat ose format nga jeta e përditshme? Shpjegoni se si mund të përdoret translacioni në detyrat që përfshijnë shpërndarjen ose bartjen e objekteve, sikurse është zhvendosja e automobilave në garazh ose planifikimi i shpërndarjes së mobileve në një hapësirë.

Përgjigjuni pyetjeve në fletoren tuaj. Shpjegoni përgjigjet e secilës pyetje përmes shembujve dhe ndani ato me shokët e klasës.

1. A i kuptoj dhe zbatoj drejt rregullat e translacionit në sistemin koordinativ?
2. A mund të caktoj koordinatat e reja të pikës dhe figurave gjeometrike pas translacionit dhe të shpjegoj se si ndryshojnë pozicionet e tyre?
3. A mund të shpjegoj dallimin mes translacionit dhe simetrisë boshtore?
4. Si e zbatova translacionin në zgjidhjen e problemeve praktike?

Punë e pavarur

1. Në një sistem koordinativ gjendet trekëndëshi me koordinatat e kulmeve: $A(2, 3)$, $B(4, 6)$ dhe $C(6, 2)$. Nëse ky trekëndësh zhvendoset për 4 njësi majtas dhe 2 njësi përsipër, cilat do të jenë koordinatat e reja të tre kulmeve të trekëndëshit?
2. Jepet, në sistemin koordinativ, katrori me koordinatat e kulmeve: $A(1, 1)$, $B(1, 4)$, $C(4, 4)$ dhe $D(4, 1)$. Përdorni translacionin që katrorin ta zhvendosni për 2 njësi djathtas dhe 3 njësi përposhtë. Shkruani koordinatat e reja të katrorit.
3. Jepet drejtëza e cila kalon nëpër pikat $P(2, 4)$ dhe $Q(5, 8)$. Nëse zbatojmë translacionin mbi këtë drejtëz për 2 njësi majtas dhe 2 njësi përsipër, atëherë cilat do të jenë koordinatat e pikave që fitohen P_1 dhe Q_1 .
4. Jepen koordinatat e kulmeve: $A_1(0, 0)$, $B_1(4, 2)$, $C_1(5, 5)$ dhe $D_1(1, 3)$ të fytyrës së paralelogramit që janë fituar nga translacioni i paralelogramit origjinal për 5 njësi djathtas dhe 1 njësi përsipër. Të shkruhen koordinatat e kulmeve të paralelogramit origjinal, përpara translacionit.
- 5.* a) Cilat janë koordinatat e origjinalit (shumëkëndëshit rozë), e cilat janë koordinatat e fytyrës (shumëkëndëshit portokalli)?
b) Për sa është zhvendosur, shumëkëndëshi, përgjatë boshtit x , e për sa përgjatë boshtit y ?



Rotacioni i shumëkëndëshave dhe zbatimi

Rotacioni në rrafshin e dhënë është një nga transformimet gjeometrike më bazike që ndryshon pozicionin e formave gjeometrike në sistemin e dhënë koordinativ. Në këtë njësi do të mësoni se si të rrotulloni shumëkëndëshin përreth pikës së dhënë për një kënd të caktuar. Do të njiheni me mënyrën se si përcaktohet pozicioni i ri i kulmeve të shumëkëndëshit dhe do të vëreni se si ndryshojnë koordinatat e tij pas rotacionit. Do t'i hulumtoni principet themelore të rotacionit, sikurse janë këndi i rotacionit dhe kahja dhe do t'i zbatoni këto koncepte për zgjidhjen e problemeve praktike nga përditshmëria.

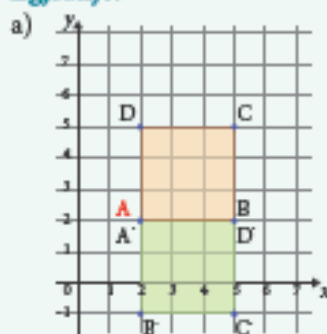


Shembulli 1

Jepet një katror me koordinatat e kulmeve: $A(2, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$ dhe $D(2, 5)$.

- Rrotulloni katrorin për këndin prej 90° rreth kulmit A në kahen e lëvizjes së akrepave të orës.
- Shkruani koordinatat e katrorit $A'B'C'D'$, që është fytyra e katrorit $ABCD$ në lidhje me rotacionin e dhënë.

Zgjidhje:



- b) Katrori i ri (fytyra) pas rrotullimit për 90° rreth pikës A ka koordinatat e kulmeve: $A'(2, 2)$, $B'(2, -1)$, $C'(5, -1)$ dhe $D'(5, 2)$.

Detyra 1

Jepet një pesëkëndësh ABCDE me koordinata të kulmeve: A(1, 2), B(3, 2), C(4, 4), D(2, 5) dhe E(0, 4). Rrotulloni pesëkëndëshin për 90° në kahen e kundërt të lëvizjes së akrepave të orës rreth kulmit A(1, 2).

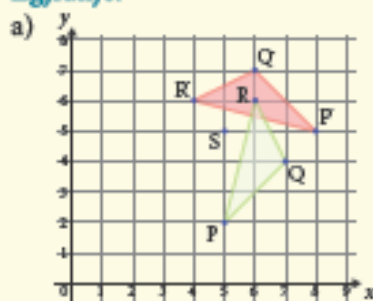
- Cilat janë koordinatat e pikave të reja B', C', D' dhe E'?
- Si është ndryshimi i vendndodhjes së pesëkëndëshit pas rotacionit?
- A thua origjinali dhe fytyra kanë formë dhe madhësi të njëjtë? Shpjegoni pse!

Shembulli 2

Pikat P(5, 2), Q(7, 4) dhe R(6, 6) janë kulme të $\triangle PQR$.

- Rrotulloni trekëndëshin $\triangle PQR$ rreth pikës S(5, 5) për 90° në kahen e kundërt me lëvizjen e akrepave të orës.
- Caktoni koordinatat e pikave të reja P', Q' dhe R' që fitohen pas rotacionit rreth pikës S për 90° .
- Matni dhe krahasoni segmentin $\overline{PQ}$ me segmentin $\overline{P'Q'}$. Çka vëreni?
- Trekëndëshi, pas rotacionit, a e ruan formën dhe madhësinë e vet? Shpjegoni!
- Cila është vendndodhja e trekëndëshit të ri në raport me trekëndëshin fillestar?

Zgjidhje:



- Trekëndëshi fytyrë që fitohet nga rotacioni i dhënë ka kulme me koordinata: P'(8, 5), Q'(6, 7) dhe R'(4, 6).
- Mund të vërejmë se distanca mes pikave P dhe Q është sa ajo mes pikave P' dhe Q', përkatësisht $PQ = P'Q'$. E njëjta vlen edhe për distancat mes pikave të tjera përkatëse. Rotacioni e ruan distancën mes pikave.
- Trekëndëshi e ruan formën dhe madhësinë e tij. Rotacioni nuk e ndryshon gjatësinë e brinjëve dhe nuk i ndryshon këndet e trekëndëshit. Ndryshon vetëm pozicionin e tij në sistemin koordinativ.
- Pozicioni i trekëndëshit të fituar me rotacion është i ndryshëm – varet nga këndi dhe kahja e rotacionit, por është identik në formë dhe madhësi me trekëndëshin fillestar.

Detyra 2

Jepet katërkëndëshi ABCD me koordinatat: A(2, 3), B(4, 3), C(4, 5) dhe D(2, 5). Rrotulloni katërkëndëshin për 90° në kahun e lëvizjes së akrepave të orës rreth pikës S(1, -1).

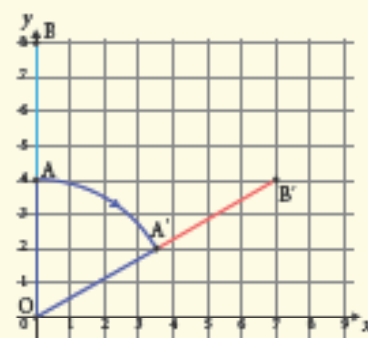
- Cilat janë koordinatat e kulmeve A', B', C' dhe D' pas rotacionit të ABCD?
- Originali dhe fytyra a janë identik në formë dhe madhësi? Shpjegoni pse!

Shembulli 3

Rrotulloni segmentin AB për këndin prej 60° rreth pikës O(0, 0) në kahen e lëvizjes së akrepave të orës. Cilat janë koordinatat e segmentit A'B'?

Zgjidhje:

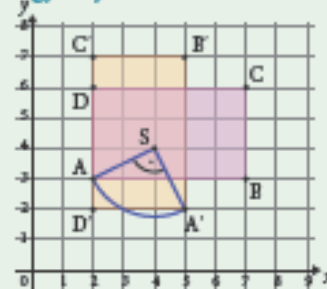
Nga sistemi koordinativ lexoni dhe shkruani koordinatat e pikave përfundimtare të fytyrës së segmentit AB pas rotacionit.



Shembulli 4

Në planifikim e shtegut në parkun e qytetit arkitekti e ka pozicionin e shtegut në sistemin koordinativ. Shtegu ka formën e drejtkëndëshit me koordinatat e kulmeve A(2, 3), B(7, 3), C(7, 6) dhe D(2, 6). Arkitekti dëshiron ta rrotullojë shtegun për 90° në kahen e kundërt me lëvizjen e akrepave të orës, rreth pikës S(4, 4), për të krijuar një pamje të re të shtegut. Caktoni koordinatat e kulmeve të shtegut të fituar pas rotacionit.

Zgjidhje:



Nga vizatimi mund të lexojmë se koordinatat e pikave të shtegut të ri janë: A'(5, 2), B'(5, 7), C'(2, 7) dhe D'(2, 2).

Si ndikon rotacioni i shumëkëndëshit rreth një pike mbi formën dhe madhësinë e tij? Gjatë rotacionit a thua gjithë kulmet e shumëkëndëshit zhvendosen njëlloj dhe në të njëjtën mënyrë? Shpjegoni se çka ndodh me pozicionet e kulmeve të shumëkëndëshit kur rrotullohet për kënde të ndryshme. Pse është e rëndësishme të dihet qendra e rrotullimit kur bëhet fjalë për rotacionin në kontekst natyror dhe gjeografik? Hulumtoni!

Shkruani në fletore: A jeni të kënaqur/a për sa keni kuptuar në lidhje me rotacionin? Shpjegoni çka do të bënit më mirë radhën tjetër.

Punë e pavarur

Me çka është i përcaktuar rotacioni?

- Kryeni rotacionin e $\triangle ABC$ me kulme $A(2, 3)$, $B(5, 5)$ dhe $C(4, 8)$ për këndin prej 90° në kahen e kundërt me lëvizjen e akrepave të orës rreth pikës $S(4, 4)$.
 - Cilat do të jenë koordinatat e reja të kulmeve A' , B' dhe C' pas rotacionit?
 - Si do të ndryshojë pozicioni i trekëndëshit në raport me vendndodhjen e tij fillestare?
- Jepet drejtkëndëshi me koordinatat e kulmeve $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, 4)$ dhe $D(1, 4)$. Rrotulloni katërkëndëshin për 180° rreth pikës që është prerja e diagonaleve të drejtkëndëshit.
 - Caktoni koordinatat e kulmeve të drejtkëndëshit pas rotacionit.
 - Si është dallimi mes pozicionit të drejtkëndëshit para dhe pas rotacionit?
 - Si ndikon, mbi vetë rotacionin, qendra e rotacionit që është pikëprerja e diagonaleve?
- Jepet shumëkëndëshi me kulmet $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$, $D(4, 0)$ dhe $E(2, 0)$. Rrotulloni shumëkëndëshin për 270° në kahen e kundërt të lëvizjes së akrepave të orës rreth pikës $O(0, 0)$.
 - Caktoni koordinatat e kulmeve të rinj: A' , B' , C' , D' dhe E' pas rotacionit.
 - Si ndikon ky rotacion mbi shpërndarjen e pikave në raport me pozicionin fillestar të shumëkëndëshit?
 - Sa shpesh përdoret rotacioni rreth origjinës së koordinatave në problemet gjeometrike dhe në cilat raste? Hulumtoni!
- Rrotulloni trekëndëshin me kulme në pikat $A(2, 3)$, $B(6, 4)$ dhe $C(5, 7)$ për 30° në kahe të kundërt të lëvizjes së akrepave të orës rreth qendrës së tij të rëndimit.
 - Cili do të jetë pozicioni i ri i trekëndëshit pas rotacionit? Caktoni koordinatat e kulmeve të ftyrës së trekëndëshit.
 - Si do të duket trekëndëshi pas rotacionit në lidhje me pozicionin e tij fillestar?

Paraqitja e formave 3D në projeksione të ndryshme

Kjo njësi mësimore do t'u ndihmojë të mësoni se si t'i paraqitni format tredimensionale (format 3D) të para nga anë të ndryshme. Paraqitja e objekteve në hapësirë është shumë e rëndësishme për të kuptuar dhe analizuar perspektivat e ndryshme të një forme. Do të mësoni të shihni dhe vizatoni format 3D nga tre pozicione të ndryshme: nga përpara, nga sipër dhe nga anash.



- Parë nga përpara (projeksioni frontal) – kjo është sikur të shihni formën nga ana e përparme, që u tregon gjatësinë dhe lartësinë e objektit.
- Parë nga sipër (projeksioni planar) – kjo është sikur të shihni nga sipër, që u ndihmon të shihni gjatësinë dhe gjerësinë e objektit.
- Parë nga anash (projeksioni në profil) – kjo është sikur të shihni formën nga anash, që u tregon lartësinë dhe gjerësinë e objektit.

Kjo dije është bazë për mësimin e mëtejshëm dhe do të jetë e dobishme në sfera të ndryshme, siç është geometria, arkitektura dhe inxhinieria.

Shembulli 1

Përpunoni rrjetin e piramidës me bazë katrore.

Zgjidhje:

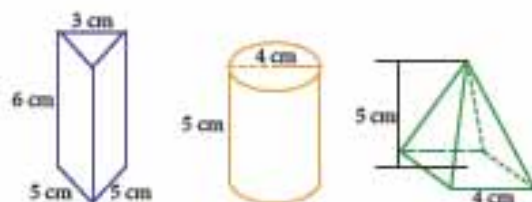


Në thelb, të fituarit e vizatimeve 2D me çka paraqesim formën 3D të parë nga anë të ndryshme (nga sipër, nga përpara, nga anash) është një lloj pasqyrim, përkatësisht projeksion ortogonal. Projeksioni ortogonal i pikës në rrafsh është pikëprerja e normales të tërhequr nëpër atë pikë kah rrafshi i dhënë.



Shembulli 2

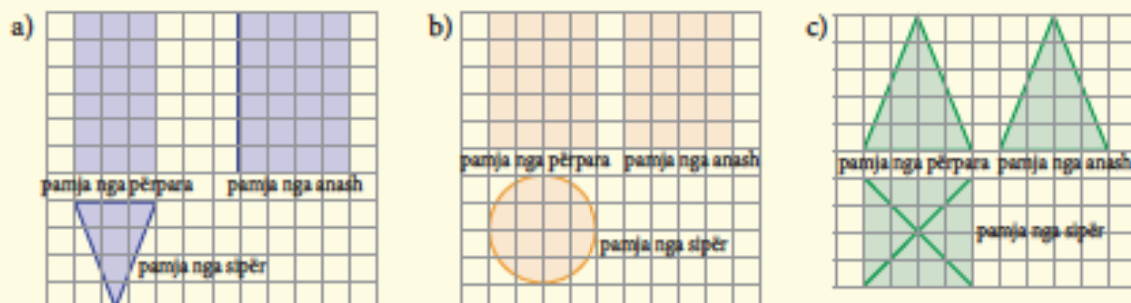
Janë dhënë tri forma të ndryshme 3D: prizmi, cilindri dhe piramida. Detyra juaj është t'i tregoni këto forma nga tre këndvështrime të ndryshme: nga sipër, nga përpara dhe nga anash.



- Si duket prizmi kur shihet nga përpara, nga sipër dhe nga anash?
- Si duket cilindri kur shihet nga përpara, nga sipër dhe nga anash?
- Si duket piramida kur shihet nga përpara, nga sipër dhe nga anash?
- Si ndryshon pamja e këtyre formave gjatë kalimit nga njëri në projektionin tjetër?

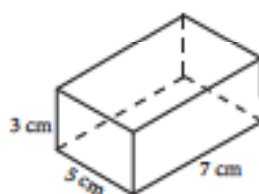
Zgjidhje:

Në vizatimet e këtij shembulli gjatësia prej 1 cm është paraqitur me gjatësinë e një katrori të vogël nga rrjeti me katrorë.



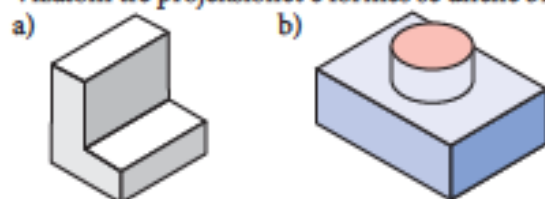
Detyra 1

Vizatoni tre projektionet e kuadrit të dhënë në vizatim.



Detyra 2

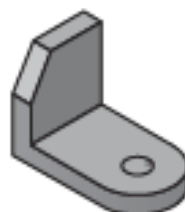
Vizatoni tre projektionet e formës së dhënë 3D.



Shembulli 3

Je një inxhinier makinerie i cili duhet të dërgojë udhëzime deri te punëtorja për prodhimin e një elementi për riparimin e ndonjë makinerie. Udhëzimet përbëhen nga vizatimet në 3 projeksione me qëllim prodhimin preciz të elementit të kërkuar të makinerisë.

- Vizatoni pjesën në 3 projeksione.
- Përgjigjuni se në cilat sfera të përditshmërisë, teknikës dhe shkencës ka zbatime të vizatimit të formave 3D në 3 projeksione?



Zgjidhje:

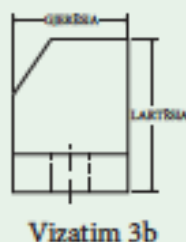
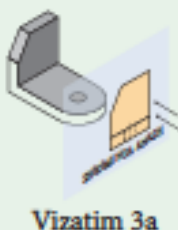
Projeksioni që fitohet gjatë shikimit nga sipër ose planin e fitojmë kur elementin (formën 3D) e shikojmë nga sipër dhe e vizatojmë formën 2D që fitohet. Kjo është treguar në vizatimin 1a. Në vizatimin 1b, nga ana tjetër, është dhënë projeksioni i parë (plani) i elementit të makinerisë.



Projeksioni që fitohet kur shikojmë formën 3D nga përpara (projeksioni frontal) fitohet në mënyrën eikutur është treguar me vizatimin 2.



Projeksioni që fitohet kur formën 3D e shikojmë nga anash (projeksioni në profil) fitohet në mënyrën e treguar në vizatimin 3



- 2) Vizatimi i formave 3D në 3 projeksione ka zbatim të gjerë në përditshmëri, edhe atë në arkitekturë, ndërtimtari, makineri, art.

Detyra 3

Duhet renditje e re e mësonjëtores. Vizatoni planin aktual të mësonjëtores, e më pas propozoni një plan të ri duke marrë në konsideratë funksionalitetin e inventarit në të.

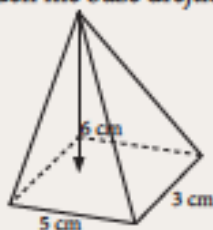
A thua tre projeksionet që përdoren për paraqitjen e formave 3D gjithmonë duhet të vizatohen në madhësinë reale? Jepni disa shembuj që të mbështetni përgjigjen tuaj.

1. Çka mësova për mënyrën e paraqitjes së formave 3D?
2. Ku kam vështirësi në të kuptuarit ose zbatimin e asaj që mësova në këtë njësi?
3. Çka mund të bëj që të përmirësoj të kuptuarit e materialit?

Punë e pavarur

1. Vizatoni në tre projeksione:

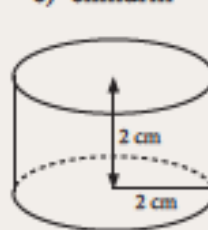
a) piramidën me bazë drejtkëndore



b) konin



c) cilindrin



2. Vizatoni në 3 projeksione formën e dhënë 3D.



3. Vizatoni në 3 projeksione pjesët e makinerisë:

a)



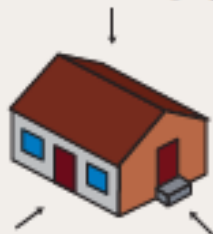
b)



c)



4. Vizatoni në 3 projeksione objektin e dhënë në figurë.



5. Vizatoni planin dhe një projeksion anësor të dhomës suaj. Në vizatim paraqitni të paktën 3 elemente të mobileve.

T E M A

3

ALGEBRA

$$2 + 2 = ?$$



$$x - y = ?$$



Algjebra është si loja me enigma – përdorim shkronja dhe ekuacione për të zbuluar se cili numër fshihet pas tyre.

Përgatituni që të zbuloni, të njehsoni dhe të mendoni si matematikan i vërtetë.

“Matematika është mbretëresha e shkencave, ndërsa algjebra është mbretëresha e matematikës”

“Algjebra është si tregim detektiv – numrat janë gjurmë, ndërsa shkronjat sekrete që duhet t’i zbulojmë”

Rezultatet e mësimit

Pas mësimit të kësaj teme do të jeni të aftë që:

- të ndërtoni shprehje algjebrike dhe formula për zgjidhjen e problemeve në kontekstin e përditshmërisë;
- të ndërtoni dhe zgjidhni barazime (ekuacione) lineare me koeficientë numra të plotë në kontekstin e dhënë;
- të përftoni vargje me numra të plotë, t’i paraqitni vizualisht dhe të shkruani kufizën e përgjithshme të vargut;
- të paraqitni probleme të përditshmërisë me funksione lineare dhe t’i vizatoni grafikët e tyre.

Bazat e algjebërës.

Kufizat, shprehjet dhe ekuacionet

Algjebra është një nga degët bazike të matematikës e cila mundëson të punojmë me numra, ndryshore dhe operacione matematike në nivel më abstrakt. Përveç numrave, në algjebër përdorim shkronja dhe simbole (për shembull $x, y, a, b, +, -, \dots$) për të prezantuar vlera të panjohura, që na mundëson të zgjidhim probleme të ndryshme matematikore.



Në këtë njësi mësimore do t'i hulumtoni tre elementet kyçe të algjebërës: kufizat, shprehjet dhe ekuacionet. Do të mësoni se çka paraqesin kufizat e një shprehje matematike, si të dalloni dhe përpiloni shprehje algjebrike dhe ekuacione – që janë veglat bazike për njehsimin dhe modelimin e situatave reale.

Kjo bazë është e rëndësishme sepse algjebra është e pranishme në shumë sfera shkencore, teknikë, ekonomi dhe përditshmërinë tonë. Të kuptuarit e këtyre koncepteve do t'u ndihmojë të zhvillojnë të menduarit logjik dhe shkathtësi për zgjidhjen e problemeve.

Shembulli 1

Markoja dëshiron të blejë një kimik dhe një fletore. Në librari, fletorja kushton 50 denarë, ndërsa kimiku 30 denarë. Ai bleu 3 fletore dhe 2 kimikë. Sa para harxhoi Markoja në librari?

Zgjidhje:

Që të gjeni shumën e përgjithshme që harxhoi ai, njehsojmë

$$3 \cdot 50 + 2 \cdot 30 = 150 + 60 = 210 \text{ denarë.}$$

Shënimi që përdorët për të njehsuar paratë që harxhoi Markoja përmban numra dhe shenja për disa nga operacionet tashmë të njohura. Ky shënim paraqet një shprehje numerike. Vlera e fituar pas llogaritjeve të të gjitha operacioneve quhet vlerë numerike e shprehjes.

Detyra 1

Njehsoni vlerat numerike të shprehjeve:

- $120 - 17 + 78 : 3 + (60 - 400 : 10)$
- $88 + 24 : 6 - 48 + 2 \cdot 60$
- $((51 - 31) + 7) \cdot 5$

Shembulli 2

Ana dhe Bojani kursejnë para për çdo muaj. Ana kursen x denarë në një muaj, ndërsa Bojani kursen 2 herë më shumë se Ana.

- Sa para kursen Bojani?
- Shkruani shprehje për kursimet e përgjithshme të Anës dhe Bojanit.
- Nëse që të dy bashkërisht kanë kursyer 9000 denarë, shkruani barazimin nga i cili do të mundni të njehsoni sa ka kursyer secili prej tyre veçmas?

Zgjidhje:

- Pasi Bojani kursen 2 herë më shumë se Ana, kjo do të thotë se kursimet e tij kapin vlerën $2x$.
- Pra, kursimet e përbashkëta të Anës dhe Bojanit janë $x + 2x$.
Kufizat e kësaj shprehje janë x dhe $2x$.
Numri (konstanta) përpara çdo ndryshoreje, në çdo kufizë, quhet koeficient i asaj kufize. Për shembull, për kufizën $2x$ koeficient është 2, ndërsa vlera kryesore është x ; për kufizën x koeficient është 1, ndërsa vlera kryesore përsëri është x . Kufizat x dhe $2x$ janë të ngjashme sepse kanë vlera të njëjta kryesore. Kufiza $-x$ është e kundërt me x .
- Sipas të dhënave të detyrës, vlera e kursimeve të përbashkëta është 9000 denarë, prandaj kemi $x + 2x = 9000$.

Ndryshorja është simbol (shpesh ndonjë shkronjë) që paraqet numrin që mund të ndryshojë ose është i panjohur. Për shembull, $x, y, z, m, n \dots$ janë ndryshore. Shprehja algjebrike është shënim me numra (konstante) dhe ndryshore të lidhura bashkë në një mënyrë të caktuar me shenjat për operacionet matematike.

Shembuj të shprehjeve: $4x + 7, a^2 - 3a + 5, 4x + 3y - 7, 18m^3 - 5n^2 + p, \dots$

Shprehjet e llojit $4x + 7$ dhe $4x + 3y - 7$ janë shprehje lineare sepse çdo kufizë e tyre që përmban ndryshore është e shkallës së parë.

Dy shprehje algjebrike nga të cilat të paktën njëra përmban një (ose më shumë) ndryshore të lidhura me shenjën " $=$ " formojnë ekuacion (barazim).

Shembuj ekuacionesh lineare:

$2x + 5 = 11, y - 4 = 0, 2a + 2b = 8, 2x - y = 3y + 25, \dots$

Detyra 2

Cilat nga shprehjet janë lineare:

- | | | |
|------------------|-------------------|---------------------|
| a) $4x + 3$ | b) $x^2 + 5x + 6$ | c) $3y^2 - 2xy + 4$ |
| ç) $5a - 2b + 7$ | d) $2y + 10z - 3$ | d) $\sqrt{x} + 4$ |

Shpjegoni pse?

Detyra 3

Shkruani tre shprehje dhe tre ekuacione. Për çdo shprehje dhe ekuacion shkruani kufizat e tij.

Shembulli 3

Shkruani shprehje që tregon sa do të paguani nëse blini tre paketime me qumësht, secili me çmim m denarë dhe katër paketime lëng, secili me çmim s denarë.

Zgjidhje:

Nëse çmimi i 1 paketimi qumësht është m denarë, ndërsa çmimi i 1 paketimi lëng është s denarë, atëherë:
për 3 paketime qumësht do të paguani: $3 \cdot m = 3m$
për 4 paketime lëng do të paguani: $4 \cdot s = 4s$.
Shuma e përgjithshme të cilën do ta paguani është: $3m + 4s$. Cilat janë kufizat e shprehjes?

Shembulli 4

Keni qenë në treg dhe për 1 kilogram mollë dhe 2 kilogramë portokalle keni paguar 260 denarë. Ju e dini se 1 kilogram mollë kushton 80 denarë, por nuk e dini çmimin e portokalleve për një kilogram dhe dëshironi ta gjeni. Si do ta paraqitnit këtë, që sapo thamë më sipër, me ekuacion?

Zgjidhje:

Çmimin e panjohur për 1 kg portokalle do ta shënojmë me x denarë, kështu që 2 kg portokalle do të kushtojnë $2x$ denarë. Çmimi për 1 kg mollë është 80 denarë, kështu që shuma e përgjithshme që do të paguhet për 2 kg portokalle dhe 1 kg mollë është $2x + 80$. Kjo shumë, në fakt, është sa vlera e paguar prej 260 denarësh, prandaj ekuacioni i kërkuar është $2x + 80 = 260$. Cilat janë kufizat e ekuacionit që sapo e shkruat?

Detyra 4

Përpiloni një ekuacion për problemin në vijim: për tri bluza prej p denarësh dhe pantallona prej 1500 denarësh janë harxhuar gjithsej 3600 denarë.

Detyra 5

Përpiloni një ekuacion për problemin në vijim: 2 kanaçe me lëng me çmim 30 denarë secila dhe 4 paketime me gatesa me nga y denarë kushtojnë 15 denarë më shumë se 7 paketime me gatesa.

Cilat janë përparësitë kur, në përditshmërinë tuaj, përdorni shprehje dhe ekuacione algjebrike krahasuar me njehsimet e rëndomta?

Në fletore, për përgjigjen me PO në pyetjet e parashtruara shkruani një shembull, ndërsa për përgjigjen JO kthehuni në mësimin që i referohet pohimit dhe përsëri shqyrtoni shembullin ose shembujt.

1. Kuptoj çka nënkuptojmë me kufizë, shprehje dhe ekuacion. (Po/Jo)
2. Mund të përpilosh shprehje algebrike duke përdorur ndryshore. (Po/Jo)
3. Di të përpilosh ekuacione për probleme nga përditshmëria. (Po/Jo)

Punë e pavarur

1. Petri ka x vjet. Motra e tij është 4 vjet më e re se ai. Përpiloni shprehje që tregon moshën e saj.
2. Shuma e dy numrave është 56. Nëse njëri nga numrat është x , përpiloni një shprehje me të cilën paraqitet numri tjetër.
3. Mësuesja ka c çokollata dhe në mënyrë të barabartë dëshiron t'ua ndaj 5 nxënësve. Përpiloni një shprehje që tregon sasinë që do ta fitojë secili nxënës.
4. a) Nëse një numër është 3 herë më i madh se numri x , përpiloni një shprehje që do ta paraqet numrin më të madh.
b) Nëse një numër është 4 herë më i vogël se numri y , përpiloni shprehjen që paraqet numrin më të vogël.
5. Një automobil harxhon y litra karburant në 100 kilometra. Nëse me këtë automobil kemi kaluar 300 kilometra, shkruani shprehjen algebrike për harxhimin e përgjithshëm të automobilin.
6. Në shitore keni blerë 4 kilogramë mollë me nga a denarë për kilogram dhe 2 kilogramë banane me nga b denarë për kilogram. Shkruani shprehjen për vlerën e përgjithshme që duhet të paguani.
7. a) Shkruani një shprehje me të cilën do të paraqitni sa është kusuri që duhet ta merrni kur me banknotën prej 500 denarësh paguani 3 lëngje me nga x denarë.
b) Shkruani një shprehje me të cilën do të paraqitni sa është kusuri që duhet ta merrni kur me banknotën 500 denarësh paguani 3 lëngje me nga x denarë dhe 4 gjevrekë me nga y denarë.
8. Shkruani ekuacionet me të cilët do të paraqitni problemin në vijim: shuma e dy numrave është 87, ndërsa njëri nga numrat është 5 herë më i madh se tjetri.
9. Lartësia e një ndërtese është h metra, ndërsa një tjetër është 39 metra më e lartë se e para. Nëse shuma e lartësive të tyre është 150 metra, shkruani ekuacionin për përcaktimin e lartësisë.
10. Një familje pagan x denarë për rrymën, që është tri herë më shumë se sa fatura që e pagan për ujin. Nëse harxhimet e përgjithshme të këtyre dy faturave janë 24000 denarë, shkruani ekuacionin që do t'u mundësojë të gjeni se sa është fatura që pagan për ujin.
11. Markoja ka të ardhura mujore bazike në vlerën e p denarëve. Përveç kësaj fiton bonus prej 10% të rrogës dhe 5000 denarë për punën shtesë. Nëse fitoi gjithsej 51200 denarë, shkruani ekuacionin për të llogaritur rrogën e tij bazë.

Thjeshtimi i shprehjes lineare. Llogaritja e vlerës

Në këtë njësi do të mësoni se si të përdorni radhën e operacioneve algjebrike për të thjeshtuar shprehjet, që është thelbësore për zgjidhjen e drejtë të detyrave matematike. Fillimisht, do të fokusoheni në mbledhjen e kufizave të ngjashme, që është hap i rëndësishëm në procesin e thjeshtimit të shprehjeve. Më pas do të mësoni t'i shumëzoni shprehjet me konstante jashta kllape dhe se si këto operacione ndikojnë në rezultatin përfundimtar.

Më tej, do ta merrni në shqyrtim konceptin e llogaritjes së vlerës së shprehjes me ndryshore kur për to janë dhënë vlera konkrete. Kjo do të ndihmojë të kuptoni se si mund të përdoret matematika për zgjidhjen e problemeve reale dhe të zhvilloni shkathtësitë për llogaritje të sakta.



Shembulli 1

Iliri shet tre lloje frutash të ndryshme sipas çmimeve në vijim:

- 1 kilogram mollë me çmim $4x$ denarë,
 - 1 kilogram dardhë me çmim $2x$ denarë,
 - 1 kilogram portokaj me çmim $2x$ denarë,
- qesja për paketimin e frutave kushton 5 denarë.

Shkruani shprehjen algjebrike që do të paraqet çmimin e përgjithshëm për blerjen e nga një kilogrami të frutave të tre llojeve që do të paketohet në qese.

Zgjidhje:

Çmimi i përgjithshëm do të jepet me shprehjen algjebrike në vijim:

$$4x + 3x + 2x + 5.$$

Detyra 1

Maria bleu 2 libra. Çmimi i një libri është $2x$ denarë, ndërsa për transportin me postë të librave pagoi shtesë edhe x denarë. Sa denarë gjithsej do të paguajë Maria për dy librat dhe transportin e tyre?

Shembulli 2

Thjeshtoni shprehjen lineare nga shembulli 1 dhe llogaritni vlerën e shprehjes kur $x = 10$.

Zgjidhje:

Thjeshtimi i shprehjes përfshin kryerjen e operacioneve mes kufizave të ngjashme, përkatësisht mbledhjen në këtë rast të kufizave të ngjashme që përmbajnë x ($4x$, $3x$ dhe $2x$)

$$4x + 3x + 2x + 5 = 9x + 5 - \text{shprehja e thjeshtuar.}$$

Për llogaritjen e vlerës së shprehjes kur $x = 10$, në vend të x shkruajmë 10 në shprehjen e fundit dhe firojmë $9x + 5 = 9 \cdot 10 + 5 = 90 + 5 = 95$. Pra, vlera e shprehjes $9x + 5$ kur $x = 10$ është 95.

Shembulli 3

Thjeshtoni shprehjen lineare në vijim: $3 \cdot (2y + 4)$. Më pas llogaritni vlerën e shprehjes kur $y = 2$.

Zgjidhje:

Për thjeshtimin e shprehjes, fillimisht lirohemi nga kllapat duke shumëzuar dhe duke kryer operacionet tjera algebrike: $3 \cdot (2y + 4) = 6y + 12$.

Llogaritja e vlerës së shprehjes kur $y = 2$, jep $6y + 12 = 6 \cdot 2 + 12 = 12 + 12 = 24$.

Shembulli 4

Thjeshtoni shprehjen $-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3$ dhe llogaritni vlerën e saj kur $x = -3$.

Zgjidhje:

Gjatë thjeshtimit të shprehjes fillimisht lirohemi nga kllapat, e më pas i mbledhim kufizat e ngjashme (sikurse janë shënuar me nënvizimet)

$$-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3 = \underline{-6x} \underline{-10} \underline{-4x} \underline{+3} = -10x - 7$$

Tani në shprehjen e thjeshtuar zëvendësojmë vlerën e x , përkatësisht marrim $x = -3$ dhe fitojmë $-10x - 7 = -10 \cdot (-3) - 7 = 30 - 7 = 23$.

Detyra 2

Thjeshtoni shprehjet, e më pas llogaritni vlerën e saj për vlerën e dhënë të ndryshore/ndryshoreve.

a) $4x + 3 - 2x + 7$, $x = 5$

b) $3a - 4a + 2a + 5$, $a = 3$

c) $2x - 7 + x - 9y + 7$, $x = 1$, $y = -1$

ç) $4(x + 3) - 2(x - 1)$, $x = 2$

d) $2(y + 4) - 3(y - 2)$, $y = -3$

Shembulli 5:

Marjani shkoi të blente fletore dhe lapsa për vitin e ri shkollor. Çmimi i një fletoreje është f denarë, kurse çmimi i një lapsi është p denarë. Ai bleu 3 fletore dhe 2 lapsa. Më pas, vendosi të blente edhe 2 fletore dhe 1 laps.

- a) Përpiloni një shprehje algjebrike që do të tregojë çmimin e përgjithshëm që pagoi Marjani.
- b) Thjeshtoni shprehjen.
- c) Njehsoni shumën e përgjithshme, nëse një fletore kushton 80 denarë dhe një laps 50 denarë.

Zgjidhje:

- a) Ndërtimi i shprehjes: $3f + 2l + 2f + l$
- b) Thjeshtimi i shprehjes: $3f + 2l + 2f + l = (3f + 2f) + (2l + l) = 5f + 3l$
- c) Njehsimi i shumës së përgjithshme, përkatësisht vlera e shprehjes për vlerat e dhëna të ndryshoreve $f = 80$, $l = 50$, jep $5f + 3l = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 50 = 400 + 150 = 550$ denarë.

Pra, Marjani harxhoi 550 denarë për fletore dhe lapsa.

Detyra 3

Aleksandra ushtron not. Në 4 ditët e para ajo notoi nga d metra për një ditë. Më pas, në 3 ditët e ardhshme, ajo notoi çdo ditë nga 5 metra më shumë se katër e ditët e para.

- a) Shkruani shprehjen algjebrike e cila tregon numrin e përgjithshëm të metrave të notuara për këto 7 ditë.
- b) Thjeshtoni shprehjen.
- c) Njehsoni numrin e përgjithshëm të metrave të notuara, nëse çdo ditë në 4 ditët e para ka notuar nga 200 metra.

Pse është e rëndësishme të respektojmë radhën e operacioneve algjebrike gjatë thjeshtimit të shprehjeve? Cilat hapa duhet t'i ndiqni kur zgjidhni shprehjet e ndërlikuara matematike me kllapa dhe operacione të ndryshme? Shpjegoni procesin.

Si mund të përdoren shprehjet algjebrike në përditshmëri, për të bërë pazar, sport ose planifikimin e kohës? A është më lehtë fillimisht ta thjeshtojmë shprehjen algjebrike përpara se ta njehsojmë vlerën e saj? Shpjegoni pse.

Tabelën rishtas vizatoni në fletore dhe vlerësoni dijet e juaja. Tabelën ndani me shokët e klasës.

	E kuptoj plotësisht	E kuptoj pjesërisht	Nuk e kuptoj
Mund të thjeshtoj shprehje lineare me mbledhje të kufizave të ngjashme			
Mund të shumëzoj me konstante jashta kllape			
Mund të njehsoj vlerën e shprehjes lineare për vlerën e dhënë të ndryshores			

Punë e pavarur

1. Thjeshtoni shprehjen:

a) $3(2x + 4) - 5x$

b) $5(a - 2) + 3(2a + 1)$

c) $2(3m - 4) - 4(m + 5)$

ç) $4(2x - 3) + 5(1 - x)$

d) $5(2 - y) - 3(4y - 1)$

2. Njehsoni vlerën e shprehjes

a) $4y - 7 + 2(y + 3)$ për $y = 2$

b) $7 - 3x + 2(4 - x)$ për $x = -1$

c) $3(2k + 1) - 4(k - 2)$ për $k = 3$

ç) $2(3p - 4) + 3(2 - p)$ për $p = 0$

d) $6 - 2(3x - 4) + x$ për $x = 2$

3. Jovani punon në një ndërmarrje të jashtme dhe fiton 50 euro për 1 orë. Shkruani shprehjen që do ta paraqet fitimin e tij mujor nëse punon x orë në muaj. Llogaritni fitimin e tij mujor nëse për një muaj punon 160 orë.

4. Amra shet stoli të punuara me dorë. Një gjerdan e shet për 25 euro. Shkruani shprehjen që do të paraqet shumën e përgjithshme mujore për x gjerdanë të shitur. Njehsoni shumën mujore nëse ajo shet 50 gjerdanë në muaj.

5. Aleksi udhëton me automobil që harxhon 8 litra karburant në 100 kilometra. Nëse udhëtimi përfshin 400 kilometra rrugë, ndërsa çmimi i karburantit është x denarë për litër, shkruani shprehje lineare që do të paraqet çmimin e përgjithshëm të karburantit për udhëtimin. Njehsoni çmimin e karburantit për rrugën prej 400 km nëse 1 litër kushton 80 denarë.

6. Në shitore çmimi i një produkti është 15 euro. Shkruani një shprehje lineare e cila e paraqet çmimin e përgjithshëm për x produkte. Njehsoni çmimin e përgjithshëm nëse blini 10 produkte.

7. Merita dëshiron të bëjë një udhëtim dhe ka 200 euro. Çdo ditë të udhëtimit ajo do të shpenzonte 30 euro për ushqim dhe 20 euro për transport. Shkruani një shprehje që paraqet shpenzimin total pas x ditësh. Llogaritni shpenzimin total nëse udhëtimi zgjat 5 ditë. A do t'i mjaftojnë Meritës 200 euro?
8. Maria ka të ardhura mujore prej 40000 denarë. Ajo, në një muaj, shpenzon 7000 denarë për banesë, x denarë për rroba, $2x$ denarë për transport dhe $3x$ denarë për ushqim. Shkruani një shprehje që paraqet shpenzimet totale mujore të Marisë dhe një shprehje për pjesën që i mbetet nga të ardhurat. Llogaritni shpenzimet e përgjithshme mujore të Marisë, nëse ajo shpenzon 3000 denarë për rroba. A do të ketë Maria kursime në muajin kur për rroba shpenzon 3000 denarë?
9. Në kopshtin botanik ka pasur y rrënjë begonie, 3 herë më shumë livando, $3y - 4$ rrënjë manushaqe dhe sherebelë 2 herë më shumë se manushaqet. Shkruani një shprehje që tregon sa rrënjë kanë mbetur në kopshtin botanik nëse janë tharë $7y$ rrënjë?

Formulat. Shprehja e një ndryshoreje përmes një tjetre

Formulat janë vegla që do të t'u ndihmojnë të zgjidhni problemet lehtë dhe shpejt. Kur përdorni ndryshore, mund të shprehni lidhje mes madhësive të ndryshme. Në këtë njësi do të mësoni si të formoni formula të thjeshta dhe si të shprehni një ndryshore përmes një tjetre. Do të mësoni gjithashtu si t'i përdorni këto njohuri në situata të përditshme, si për shembull llogaritja e çmimit, shpejtësisë apo kohës. Këto aftësi nuk përdoren vetëm në matematikë, por edhe në fusha të ndryshme si fizika, ekonomia dhe inxhinieria, ku shpesh hasim situata që kërkojnë të tilla llogaritje.

$$Koha = \frac{Largësia}{Shpejtësia}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Shembulli 1

Nëse Dimitri lexon 20 faqe në ditë, shkruani një shprehje që paraqet numrin e faqeve që Dimitri do të lexojë për x ditë.

Zgjidhje:

Numri i faqeve të lexuara pas x ditësh jepet me shprehjen: $20x$. Nëse e shënojmë numrin e përgjithshëm të faqeve me B , atëherë do të fitonim $B = 20x$.

Shembulli 2

Petri është 23 vjet më i madh se Selma. Petri është p vjeç, ndërsa Selma është s vjeçe. Formuloni një formulë që lidh moshën e Selmës dhe Petrit.

Zgjidhje:

Nëse i shkruajmë moshat algjebrikisht, me shkronjat e dhëna, përkatësisht ndryshoret, kemi:
 $p = s + 23$. Kjo formulë tregon lidhjen mes moshës së Petrit dhe asaj të Selmës.

Formula është mënyrë e saktë për lidhjen e ndryshoreve me operacionet përkatëse matematikore për situatën (detyrën) e dhënë. Formulatat shpesh përdoren për të shprehur rregulla të përgjithshme ose ligje në matematikë, në shkencat tjera, madje edhe në jetën e përditshme.

Shembulli 3

Një libër kushton 170 denarë, ndërsa një revistë kushton 50 denarë. Shkruani formulën për çmimin e përgjithshëm S , në denarë, që duhet të paguhet gjatë blerjes së x librave dhe y revistave.

Zgjidhje:

Çmimi i përgjithshëm = çmimi i përgjithshëm i librave + çmimi i përgjithshëm i revistave.

Çmimi i përgjithshëm i librave është $170 \cdot x = 170x$.

Çmimi i përgjithshëm i revistave është $50 \cdot y = 50y$.

Formula për çmimin e përgjithshëm është $S = 170x + 50y$.

Shembulli 4

Shprehni brinjën a të një trekëndëshi barabrinjës nëpërmjet perimetrit P .

Zgjidhje:

Perimetri i trekëndëshit barabrinjës është $P = 3a$, prandaj nëse duam të shprehim brinjën përmes perimetrit, fitojmë $a = \frac{P}{3}$. Nëse, për shembull, është dhënë perimetri i trekëndëshit $P = 75$ cm, atëherë brinja $a = \frac{75}{3} = 25$ cm.

Detyra 1

Mosha e nënës është shuma e moshës së djalit dhe vajzës. Shkruani formulën që shpreh moshën e nënës në varësi të moshës së djalit dhe vajzës. Pastaj shprehni moshën e djalit në varësi të moshës së nënës dhe vajzës.

Detyra 2

Përpiloni formulën për perimetrin P të trekëndëshit barakrahës me bazë a dhe krah b , e më pas:

- a) shprehni bazën përmes ndryshoreve të tjera të formulës,
b) shprehni krahun përmes ndryshoreve të tjera të formulës.

Shembulli 5

Luka udhëton me taksi deri në aeroport, por nuk është i sigurt nëse do të ketë mjete të mjaftueshme për transportin. Ai e di se kompania e taksive tarifton një kosto fikse (nisje) prej 80 denarësh dhe 50 denarë për çdo kilometër të kaluar. Nëse numri i kilometrave të kaluar shënohet me k dhe çmimi total për transportin me C :

- a) shkruani formulën sipas së cilës llogaritet çmimi total C për transportin,
b) shprehni numrin e kilometrave k përmes ndryshoreve të tjera në formulë,
c) a do t'i mjaftojnë Lukës 4000 denarë për transport nëse duhet të kalojë 70 kilometra me taksi deri në aeroport?

Zgjidhje:

- a) Çmimi total për transport = tarifa e nisjes + tarifa për kilometrat e përshkruar. Tarifa për kilometrat e përshkruar = çmimi për 1 kilometër · numri i kilometrave
 $= 50 \cdot k$. Përfundimisht $C = 80 + 50k$.
- b) Për ta shprehur numrin e kilometrave të përshkruar k , fillimisht zbrisim 80 nga të dy anët e formulës. Fitojmë $C - 80 = 80 + 50k - 80$, përkatësisht $C - 80 = 50k$.
 Pastaj pjesëtojmë me 50, përkatësisht $50k : 50 = (C - 80) : 50$ dhe fitojmë $k = \frac{C-80}{50}$.
- c) Këtu pyetja është, në fakt, sa kilometra mund të përshkojë Luka me 4000 denarë. Zëvendësojmë vlerën $C = 4000$ në formulën që fituam në (b),
 $k = \frac{4000-80}{50} = \frac{3920}{50} = 78,4 \text{ km} > 70 \text{ km}$ Kjo do të thotë se Luka ka mjaftueshëm denarë për të paguar taksinë deri në aeroport.
 (Mënyra e dytë: Sa para i duhen Lukës për taksi për një distancë prej 70 km;
 $80 + 70 \cdot 50 = 3580 < 4000$).

Detyra 3

Në një kompani për prodhimin e këmishave, çmimi i një këmishe është 800 denarë, kurse haxhimet fikse për prodhimin e këmishave janë 1200 denarë në muaj. Shkruani një formulë që e paraqet shumën mujore totale C (në denarë) për prodhimin e x këmishave. Pastaj shprehni ndryshoren x përmes C .

Detyra 4

Formula për llogaritjen e syprinës së katrorit është $S = a^2$, ku S është syprina, ndërsa a është gjatësia e brinjës. Shprehni brinjën a përmes syprinës S . Pastaj, nëse $S = 49 \text{ cm}^2$, llogaritni brinjën e katrorit.

Në fletore për PO shkruaj një shembull, kurse për JO kthehu në atë pjesë të mësimit që ka të bëjë me pohimin dhe përsëri shqyrto shembullin/shembujt.

1. Di të formuloj formula të thjeshta. (Po/Ja)
2. Mund të shpreh një ndryshore përmes një tjetre në një formulë. (Po/Ja)
3. I kuptoj formulat dhe përdorimin e tyre në situata të përditshme. (Po/Ja)

Punë e pavarur

1. Imagjiloni se blini disa kilogramë mollë. Nëse çmimi për 1 kg është c dhe blini k kilogramë, si do ta llogaritni çmimin total? Shkruani formulën që tregon lidhjen midis çmimit total (C), çmimit për 1 kg (c) dhe sasisë (k).
2. Në një kopsht frutash ka pasur 30 arka me fidanë pemësh. Në çdo arkë ka pasur nga x fidanë. Për shkak të kushteve të këqija atmosferike dhe mbrojtjes së vonuar, çdo javë thahen nga 3 fidanë. Formuloni një shprehje me të cilën do të llogaritet numri total i fidanëve të shëndetshëm V pas m javësh.
3. Po udhëtoni me makinë. Formula për shpejtësinë është: $v = \frac{S}{t}$ ku v është shpejtësia, S është distanca dhe t koha. Shprehni kohën (t) përmes distancës (S) dhe shpejtësisë (v).
4. Në një reaksion kimik, temperatura e substancës rritet çdo orë me 2°C . Nëse temperatura fillestare është T_0 , shkruani formulën që paraqet temperaturën T pas x orësh. Pastaj shprehni ndryshoren x përmes T .
5. Në një fermë, numri i kafshëve çdo muaj rritet me 12. Nëse numri fillestar i kafshëve është m , shkruaj një formulë që paraqet numrin e kafshëve n pas x muajsh. Pastaj shprehni ndryshoren x përmes n .
6. Enesi ka marrë me qira një stendë për shitjen e suvenireve. Shpenzimet fikse për qiranë janë 1500 denarë në muaj, ndërsa fitimi i Enesit për çdo suvenir të shitur është 20 denarë.
 - a) Shkruani një formulë që paraqet fitimin C (në denarë) të Enesit nga shitja e x suvenireve.
 - b) Shprehni ndryshoren x përmes C .
 - c) Sa suvenire duhet të shesë, të paktën, Enesi që të mund të paguajë shpenzimet mujore fikse?
7. Shprehni gjatësinë a të një drejtkëndëshi:
 - a) nga formula për perimetrin $P = 2a + 2b$
 - b) nga formula për syprinën $S = a \cdot b$.

Ekuacioni linear me një të panjohur. Zgjidhja e ekuacionit

Në jetën e përditshme shpesh hasni situata në të cilat duhet të llogaritni një vlerë të panjohur, për shembull, sa para mungojnë për të blerë diçka, sa kohë do të duhet për të arritur në një destinacion, sa njësi të një produkti duhet të blini për të shpenzuar një shumë të caktuar, e të ngjashme. Problemet e përmendura mund të zgjidhen me ndihmën e ekuacioneve (barazimeve) lineare.

$$\begin{aligned} & \text{Yellow} + \text{Yellow} + \text{Yellow} = 21 \\ & \text{Orange} + \text{Orange} + \text{Yellow} = 13 \\ & \text{Green} + \text{Orange} + \text{Yellow} = 18 \\ & \text{Yellow} - \text{Orange} + \text{Green} - \text{Orange} = ? \end{aligned}$$

Shembulli 1

- a) Jepet ekuacioni $2x + 5 = 11$. Provoni se për cilat vlera të x nga bashkësia $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ekuacioni kalon në identitet numerik.

Zgjidhje:

Me zëvendësim të drejtpërdrejtë të secilës vlerë të ofruar për x fitohen 5 barazime të ndryshme numerike, prej të cilëve i saktë është vetëm njëri. Për atë vlerë të x themi se është zgjidhje e ekuacionit $2x + 5 = 11$.

Vlera për x	Barazia numerike	E saktë/Jo e saktë	Zgjidhje
$x = -1$	$2 \cdot (-1) + 5 = 11$	Jo e saktë	Jo
$x = 0$	$2 \cdot 0 + 5 = 11$	Jo e saktë	Jo
$x = 1$	$2 \cdot 1 + 5 = 11$	Jo e saktë	Jo
$x = 2$	$2 \cdot 2 + 5 = 11$	Jo e saktë	Jo
$x = 3$	$2 \cdot 3 + 5 = 11$	E saktë	Jo

Vlera e ndryshores për të cilën ekuacioni kalon në identitet numerik quhet zgjidhje e ekuacionit.

Detyra 1

Provoni nëse:

- a) $x = 3$ është zgjidhje e ekuacionit $3x + 10 = 1$ b) $x = -2$ është zgjidhje e ekuacionit $x^2 = 4$
 c) $x = 2$ është zgjidhje e ekuacionit $x^2 = 4$ ç) $x = -\frac{2}{3}$ është zgjidhje e ekuacionit $3 - 5x = x + 7$

Detyra 2

Për cilat vlera të x vlera numerike e shprehjes $x - 1$ është e barabartë me:

- a) 0 b) 5 c) -6

Shembulli 2

Zgjidhni ekuacionin $7x + 4 = 9 - 3x$.

Zgjidhje:

Gjatë zgjidhjes së ekuacioneve lineare përdorim operacione të kundërta, ku ekuacionin e sjellim në formën e zgjidhur $x = a$.

Në rastin konkret, fillimisht në dy anët e ekuacionit shtojmë $3x$, pastaj -4 dhe në fund pjesëtojmë me 10.

$$7x + 4 = 9 - 3x \quad | +3x$$

$$7x + 4 + 3x = 9 - 3x + 3x$$

$$10x + 4 = 9 \quad | -4$$

$$10x + 4 - 4 = 9 - 4$$

$$10x = 5 \quad | : 10$$

$$x = 5 : 10$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Si do ta provoni se $x = \frac{1}{2}$ është zgjidhje e ekuacionit $7x + 4 = 9 - 3x$?

Shembulli 3

Zgjidhni ekuacionin $2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$.

Zgjidhje:

Fillimisht lirohemi nga kllapat, e më pas veprojmë ngjashëm si në shembullin paraprak:

$$2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$$

$$2x - 6 + 4 = 10 - 3x + 3$$

$$2x - 2 = 13 - 3x \quad | +3x + 2$$

$$2x + 3x = 13 + 2$$

$$5x = 15 \quad | : 5$$

$$x = 3$$

Shpjegoni pse?

Detyra 3

Zgjidhni ekuacionet dhe kontrolloni zgjidhjen:

a) $7x + 4 = -38$

b) $3(2x - 4) = 5x + 1$

c) $3(x + 1) + 5 = 8 - 2(x - 5)$

Shembulli 4

Martina ka 250 denarë dhe dëshiron të blejë disa paketime me gatesa. Një paketim kushton 40 denarë. Ajo dëshiron të llogaritë sa paketime mund të blejë nëse pas blerjes duhet t'i mbetin 30 denarë për biletën e autobusit.

Zgjidhje:

Detyrën do ta zgjidhim fillimisht duke formuluar një ekuacion, e pastaj duke e zgjidhur atë. Le të jetë x numri i paketimeve që duhet ta përcaktojmë. Sipas kushteve të detyrës, për x paketime gatesa, shuma e përgjithshme që do të shpenzojë Martina është $40x$, ndërsa mbetja është 30 denarë. Meqë fillimisht ka pasur 250 denarë, mund të formulojmë ekuacionin vijues

$$250 - 40x = 30 \quad | -250$$

$$-40x = 30 - 250$$

$$-40x = -220 \quad | : (-40)$$

$$x = 5,5$$

Për numrin e paketimeve nga ekuacioni fitojmë 5,5, por meqë Martina nuk mund të marr gjysmë paketimi, ajo do të blejë 5 të tilla. Në fund do t'i mbetin edhe $250 - 40 \cdot 5 = 50$ denarë, çka do të thotë se me siguri se do të ketë mjaftueshëm para për biletën e autobusit.

Detyra 4

Një shkollë organizon një ekskursion dhe çmimi për transportin për një nxënës është 300 denarë. Përveç kësaj, për të gjithë nxënësit duhet të paguhet edhe një shumë fikse prej 5000 denarësh për ciceronin. Shuma totale që duhet të paguhet për ekskursionin është 23 000 denarë. Sa nxënës do të shkojnë në ekskursion?

Si mund ta dalloni kur një problem nga jeta reale mund të zgjidhet me ekuacion linear? A ka zgjidhja e ekuacionit, gjithmonë, kuptim në kontekstin real? Shpjegoni me një shembull. A mund të mendoni një shembull tjetër nga jeta e përditshme ku do të përdornit ekuacion linear për të llogaritur një vlerë të panjohur? Si mund të kontrollosh nëse është e saktë zgjidhja jote e ekuacionit?

Përgjigjuni pyetjeve në fletoren tuaj. Ndani përgjigjet me shokët/shoqet e klasës.

1. Mendo: A mund të përpiloj një ekuacion linear për një problem nga jeta e përditshme?
2. Zgjidh: A di ta zgjidh një ekuacion hap pas hapi?
3. Kontrolllo: A mund ta kontrolloj saktësinë e zgjidhjes sime me zëvendësim?
4. Zbato: A mund të shpik një problem që zgjidhet me ekuacion linear?

Punë e pavarur

1. Jepet ekuacioni: $5x - 7 = 18$. A thua $x = 5$ është zgjidhje e ekuacionit?
- 2.* Zgjidhni ekuacionet: a) $2x + 5 = 3x - 7$ b) $0 \cdot y + 9 = 0$ c) $0 \cdot z + 0 = 0$
3. Ana dhe Bojani së bashku kanë 56 libra. Ana ka 8 libra më shumë se Bojani. Shkruani një ekuacion që e paraqet këtë problem.
4. Lirimi ka menduar një numër të tillë që kur shumëzohet me 3 dhe pastaj i shtohet 5, rezultati është 20. Cilin numër ka menduar Lirimi?
5. Markoja ka blerë 4 kuti me karamela dhe në çdo kuti kishte nga x karamela. Pastaj ka ngrënë 6 karamela dhe i kanë mbetur 34. Sa karamela kishte në secilën kuti?
6. Në një restorant, çmimi i një pice dhe një lëngu bashkë është 540 denarë. Nëse pica kushton tri herë më shumë se lëngu, atëherë sa kushton lëngu?
7. Perimetri i një drejtkëndëshi është 48 cm. Gjatësia është tri herë më e madhe se gjerësia. Sa janë gjatësia dhe gjerësia e drejtkëndëshit?
8. Në një lojë me top, Janko dhe Slavko kanë vendosur këto rregulla: për çdo goditje në kosh fitojnë 3 pikë dhe për çdo huqje humbin 2 pikë. Janko thotë se Slavko ka fituar 33 pikë pas 16 tentimesh në kosh, por nuk e di sa herë ka qëlluar dhe sa herë ka huqur koshin. Ndhmoni ta zgjidhin problemin (përpiloni ekuacionin, zgjidhni dhe kontrolloni nëse zgjidhja është e saktë).
9. Paguani paketë mujore për telefonin prej 1000 denarë dhe çdo minutë shtesë e bisedës, jashtë kontratës së paketës, paguhet 5 denarë. Nëse fatura për këtë muaj është 1150 denarë, sa minuta shtesë keni folur? Përpiloni një ekuacion, zgjidhni dhe shpjegoni hapat.
10. Në një dyqan, një xhakëtë dhe një palë pantallona kushtojnë bashkë 6500 denarë. Xhaketa kushton 500 denarë më shumë se dyfishi i çmimit të pantallonave. Sa kushton secili produkt?
11. Andrei ka blerë 3 palë atlete sportive dhe një çantë shpine. Çdo palë atlete kushton njësoj, ndërsa çanta është 800 denarë më e shtrenjtë se dyfishi i çmimit të një pale atletesh. Nëse ka paguar gjithsej 14600 denarë, sa kushtojnë një palë atlete?
12. Mihaela ka udhëtuar me tren dhe autobus. Distanca që ka kaluar me autobus, e shtuar për 80 kilometra, është tri herë më e vogël se ajo që ka kaluar me tren. Nëse distanca totale ishte 560 km, sa kilometra ka kaluar Mihaela me secilin mjet transporti?
13. Në një rezervuar industrial ka 120 litra ujë. Çdo orë në të hyjnë tri herë më shumë litra ujë sesa që dalin, e përveç kësaj, çdo orë shtohen edhe 40 litra shtesë. Nëse pas 6 orësh rezervuari ka 900 litra ujë, sa litra hyjnë dhe dalin në një orë?

Vargjet me numra të plotë

Imagjinoni se organizoni një festë ditëlindjeje, e organizoni hapësirën dhe duhet të llogaritni sa të ftuar mund të ulen në 4 tavolina të bashkuara, në 5 tavolina... (siç është treguar në figurë). A ekziston një lidhje midis numrit të tavolinave të bashkuara dhe numrit të karrigeve rreth tyre? A ekziston lidhja mes çdo renditje të radhës të karriges me atë paraprake? Në këtë njësi mësimore do të mësoni si të renditni numra dhe vizatime, si të zbuloni se si funksionon radhitja e numrave ose vizatimeve. Do të hulumtoni se si fitohet çdo numër ose paraqitje vizuale e radhës, pra një model në një varg të dhënë dhe si ta gjeni cili numër qëndron në një pozicion të caktuar.



Shembulli 1

Amina kursen çdo ditë. Ditën e parë ka kursyer 5 denarë, ditën e dytë ka pasur 10 denarë, ndërsa ditën e tretë kursimi i saj ishte 15 denarë. Nëse vazhdon kështu për çdo ditë, sa denarë do të ketë kursyer gjithsej deri në ditën e pestë?

Zgjidhje:

Vërejmë se Amina çdo ditë i shton shumës së mëparshme nga 5 denarë:

- Dita e parë: 5 denarë
- Dita e dytë: 10 denarë ($5 + 5$)
- Ditën e tretë: 15 denarë ($10 + 5$)
- Ditën e katërt: 20 denarë ($15 + 5$)
- Ditën e pestë: 25 denarë ($20 + 5$)

Pra, në ditën e pestë Amina do të ketë 25 denarë.

Kjo mënyrë e shënimit të numrave në një renditje të caktuar ndihmon të kuptoni çka është vargu dhe si mund të zbuloni kufizat e tij.

Detyra 1

Numëroni nga 4, duke filluar prej: a) -5 b) -2 c) 1 .

Sa është kufiza e gjashtë?

Shembulli 2

Jepen numrat: 5, 8, 11, 14, 17, ...

- Cili është numri i shtatë?
- Cila është rregulla me të cilën mund ta përcaktojmë cilindo numër të radhës?

Zgjidhje:

- Numri i parë (a_1): 5,
 numri i dytë (a_2): $5 + 3$,
 numri i tretë (a_3): $5 + 3 + 3$,
 numri i katërt (a_4): $5 + 3 + 3 + 3$,
 numri i pestë (a_5): $5 + 3 + 3 + 3 + 3$,
 numri i gjashtë (a_6): $5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$,
 numri i shtatë (a_7): $5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.
 Pra, numri i shtatë është 23.

Numrat ose vizatimet (skemat) e renditur(a) që janë të lidhur me një rregull të caktuar quhen varg. Numrat, skemat ose paraqitjet vizuale (vizatimet) e një vargu i quajmë kufiza të vargut.

Kufizat e vargut numerik i shënojmë me $a_1, a_2, a_3, \dots$ ku indeksi (numri i shënuar me madhësi të vogël djathtas shkronjës a) tregon vendin e kufizës në vargun përkatës.

- Secila kufizë e vargut 5, 8, 11, 14, 17, ... është për 3 më e madhe se kufiza paraprake. Pra, numrat fitohen duke i shtuar numrin 3 paraardhësit.

Rregulla për përcaktimin e kufizës së radhës të vargut është "shto 3".

Mund të vërejmë se çdo kufizë pasardhëse e vargut fitohet duke shtuar 3 më shumë herë.

Nëse kufizën që është e n -ta me radhë në varg, gjegjësisht kufizën e n -të, e shënojmë me a_n , mund të shkruajmë $a_n = 5 + 3 \cdot (\text{numri i treshave që shtojmë})$. Nga shembulli nën a) vërejmë se kufizës së dytë i është shtuar një tresh, kufizës së tretë i janë shtuar dy tresha, kufizës së katërt i shtohen tre tresha e kështu me radhë. Pra, kufizës së n -të i shtohen $(n - 1)$ tresha. Kështu, jemi në gjendje të shkruajmë formulën për gjetjen e secilës kufizë (kufizës së përgjithshme) të vargut, edhe atë $a_n = 5 + 3 \cdot (n - 1)$. Mund ta provojmë nëse kjo formulë funksionon. Me të vërtetë, për anëtarin e shtatë nën a) fituam se është 23. Sipas formulës për kufizën e përgjithshme nëse vejmë $n = 7$, fitojmë $a_7 = 5 + 3 \cdot (7 - 1) = 5 + 3 \cdot 6 = 5 + 18 = 23$.

Shembulli 3

Në figurën poshtë janë paraqitur grupe yjesh:

*
**

a) Sa yje do të ketë grupi i gjashtë? b) Si do të dukej grupi i dhjetë?

Zgjidhje:

- a) Nëse i numëroni yjet në secilin grup, fitoni vargun: 1, 2, 3, 4, 5, ...
Mund të vëreni se çdo grup i ri përmban një yll më shumë se grupi i mëparshëm.
Pra, anëtari i gjashtë do të ketë 6 yje.
Rregulli për të përcaktuar numrin e yjeve në grupin e radhës është "shto 1".
- b) Për grupin e dhjetë do të ketë 10 yje, pra numri i yjeve në grupin e n -të është $a_n = n$, ku n është numri i grupit dhe a_n është numri i yjeve në të.

Detyra 1

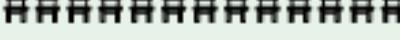
Kufiza e përgjithshme e një vargu është dhënë me formulën $a_n = 2n$. Sa është kufiza e pestë, respektivisht a_5 ?

Shembulli 4:

Markoja ka filluar të radhitë karrige në sallën e koncertit. Në rreshtin e parë ka 4 karrige, në të dytin 7, në të tretin 10, në të katërtin 13...

- a) Sa karrige do të ketë në rreshtin e gjashtë?
b) Sa karrige do të ketë në rreshtin e dymbëdhjetë?
c) Shkruani formulën për kufizën e përgjithshme, me të cilën mund të llogaritësh numrin e karrigeve në cilindo rresht.
d) Nëse në vend të numrave këtë varg e paraqet me vizatim, si do të duken katër rreshtat e parë?

Zgjidhje:

- a) Nëse e shkruani numrin e karrigeve në secilin rresht, do të keni: 4, 7, 10, 13, ...
Vëreni se çdo rresht ka 3 karrige më shumë se ai i mëparshmi.
Në rreshtin e pestë ka 16 karrige (13 + 3), ndërsa në rreshtin e gjashtë 19 karrige (16 + 3).
- b) Anëtari i 12-të ka: $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 33 = 37$.
- c) Formula për kufizën e përgjithshme të vargut është: $a_n = 4 + 3(n - 1)$ Pse? Kthehu te shembulli 2 pika a).
- d) Nëse e paraqet vargun me vizatime, do të duket kështu:
- rreshti 1: 
rreshti 2: 
rreshti 3: 
rreshti 4: 

Detyra 2

Orhani vendosi të kursejë para për çdo javë. Javën e parë kurseu 50 denarë, javën e dytë 80 denarë, javën e tretë 110 denarë, javën e katërt 140 denarë dhe kështu me radhë.

- Sa para do të kursejë në javën e tetë nëse vazhdon të kursejë sipas këtij modeli?
- Sa para gjithsej do të ketë kursyer pas dhjetë javësh?
- Shkruani formulën me të cilën mund të llogaritet sa do të kursejë Orhani në cilëndo javë.
- Si do të dukej kjo vizualisht nëse e paraqesim me rreshta monedhash?

Në figurë është paraqitur radhitja e karrigeve rreth tavolinave drejtkëndore me bashkimin e tyre. Sa tavolina duhet të bashkohen që të mund të ulen 30 të ftuar?



Në fletoren tënde për PO shkruaj një shembull, ndërsa për JO kthehu te pjesa e mësimi që i përket pohimit dhe shqyrto përsëri shembullin/shembujt.

Mund të përcaktoj anëtarët e një vargu sipas një rregulli të dhënë. a) Po, b) Jo

Mund të gjej anëtarin në një pozicion të caktuar. a) Po, b) Jo

Mund të gjej rregullin për një varg me numra të plotë. a) Po, b) Jo

Punë e pavarur

- Vargu i numrave që shfaqen në treguesin e ashensorit në një ndërtesë është: 0, 3, 6, 9, 12, ...
 - Përcakto sipas cilit rregull është ndërtuar vargu.
 - Nëse kati më i lartë në ndërtesë është 74, a do të shfaqet ai në treguesin e ashensorit? A janë të paraqitur të gjitha katet e ndërtesës në tregues?
 - Shkruani një varg të ri të shfaqjes së numrave në treguesin e ashensorit, duke filluar me parkingun nëntokësor të ndërtesës i cili do të shënohej me -2 dhe rregullin e vargut që do ta përcaktoni vet.
- Për secilin nga këta vargje:
 - 69, 62, 55, 48, ... b) -17, -13, -9, -5, ...
 - 11, 7, 3, -1, ... ç) -5, -8, -11, -14, ...
 shkruani rregullin për përcaktimin e kufizës së radhës të vargut dhe shkruani tre kufizat e ardhshme.



3. Çdo ditë në mensën e shkollës shtoheshin 10 vakte më shumë. Ditën e parë ka 50 vakte.
 - a) Shkruani vargun për pesë ditët e para.
 - b) Shkruani kufizën e përgjithshme të vargut.
4. Video-loja juaj e preferuar ka nivele që rriten në vështirësi sipas vargut: 3, 10, 17, 24,...
 - a) Gjeni rregullin sipas të cilit rritet vështirësia e nivelit në lojë.
 - b) Mendoni një mënyrë të re të rritjes së vështirësisë që do të ishte sfiduese, por e drejtë.
5. Aleksi dëshiron të vendosë drita përgjatë një shtegu në park. Drita e parë është 3 metra nga fillimi, e dyta 7 metra, e treta 12 metra, e katërta 18 metra.
 - a) A ka ky varg një rregull logjik?
 - b) A janë distancat mes dritave optimale?
 - c) Si do ta ndryshojë renditjen që shtegu të ndriçohet në mënyrë të barabartë?
- 6.* Në një lojë kompjuterike, lojtari mbledh monedha të arta. Numri i monedhave që fiton në çdo nivel pasues ndjek vargun: 2, 6, 12, 20, 30,...
 - a) A mund të zbuloni si rritet numri i monedhave në çdo nivel pasues?
 - b) Sa monedha do të marrë lojtari në nivelin e 6-të?
 - c) Shkruani një rregull të përgjithshëm sipas të cilit mund të llogaritet numri i monedhave në cilindo nivel.
7. Shpikni një varg tuajin interesant që do të përdoret për llogaritjen e shpërblimeve në lojë, mbledhjen e bonuseve apo shpërndarjen e çmimeve në një turne. Shpjegoni pse pikërisht ai varg është i mirë dhe si e bëtë të jetë i drejtë për të gjithë pjesëmarrësit.
- 8.* Shkruani rregullin për vargun 2, 4, 8, 16, ... Shkruani rregullin për anëtarin e përgjithshëm a_n .
9. Shkruani rregullin sipas të cilit përcaktohet anëtari i përgjithshëm i vargut:



Paraqitja e funksioneve të thjeshta

Koncepti matematikor i funksionit është mjet i fuqishëm për modelimin dhe analizën e problemeve në jetën reale. Ai është një nga nocionet themelore në matematikë që përshkruan se si një madhësi varet nga një tjetër, përkatësisht lidh elementët e një bashkësie me elementë të një bashkësie tjetër sipas një rregulli të caktuar. Një pjesë të asaj se si shfaqet kjo lidhje do ta mësoni në këtë mësim. Duke ushtruar atë që keni mësuar, do të mund të kuptoni dhe të zbatoni funksionet në situata reale të jetës, si edhe në mësimin e mëtejshëm të matematikës.



Shembulli 1

Unë filloj me 2 dhe pastaj çdo numër pasues e fitoj duke i shtuar 5. Cilët janë pesë numrat e parë në këtë varg dhe si e shkruajmë rregullin për gjetjen e kufizës së përgjithshme?

Zgjidhje:



Pesë numrat e parë të vargut janë: 2, 7, 12, 17, 22

Shembulli 2

Marko ka 5 mollë. Çdo ditë pasuese ai fiton edhe 3 mollë të tjera. Sa mollë do të ketë pas disa ditësh marrje të mollëve të reja?

Zgjidhje:

Marko fillon me 5 mollë. Çdo ditë fiton edhe 3 mollë më shumë. Pra, nëse situatën e përshkruajmë me fjalë: "Nga 5 mollët fillestare, numri i mollëve të Markos rritet për 3 çdo ditë."

Funksioni është rregull sipas të cilit çdo elementi të një bashkësie i shoqërohet saktësisht vetëm një element i një bashkësie tjetër.

Në këtë shembull, numri i mollëve varet nga numri i ditëve sipas një rregulli të dhënë (funksionit) që lidh dy madhësitë "numrin e ditëve" me "numrin e mollëve". Për një pamje më të qartë, këtë do ta paraqesim fillimisht me një tabelë.

Dita	Hyrja	Dalja
Dita e parë	$5 + 3$	8
Dita e dytë	$5 + 3 + 3$	11
Dita e tretë	$5 + 3 + 3 + 3$	14
Dita e katërt	$5 + 3 + 3 + 3 + 3$	17
Dita e pestë	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	20
Dita e gjashtë	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	23

Sipas tabelës dhe kushteve të detyrës, për ditën e shtatë, për shembull, numri i mollëve do të jetë $5 + 3 \cdot 7 = 26$ mollë. Nëse me x shënojmë numrin e ditëve dhe me f rregullin që i bashkëngjitet numrit të ditëve numrin e mollëve, kemi:

$$\begin{array}{lll}
 1 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 1 & 1 \xrightarrow{f} 8 & f(1) = 5 + 3 \cdot 1 = 8 \\
 2 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 2 \dots \text{përkatesisht} & 2 \xrightarrow{f} 11 \dots \text{ose e shkruar ndryshe} & f(2) = 5 + 3 \cdot 2 = 11 \\
 3 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 3 & 3 \xrightarrow{f} 14 & f(3) = 5 + 3 \cdot 3 = 14
 \end{array}$$

Tani, nëse me x shënojmë numrin e ditëve, ndërsa $f(x)$ është numri total i mollëve, fitojmë formulën: $f(x) = 5 + 3x$. Kjo mënyrë e paraqitjes së funksionit quhet paraqitje analitike (ose paraqitje me formulë).

Para se Marko të fillojë të fitojë mollë, numri i ditëve është $x = 0$ dhe Marko ka 5 mollë.

Detyra 1

Në fillim të vitit shkollor, Lena vendos të fillojë të mbledh pulla. Ka 2 pulla dhe pastaj çdo ditë shton nga 4 pulla. Sa pulla do të ketë Lena pas 3 ditësh? Shkruaj funksionin me formulë.

Shembulli 3

Në një dyqan produktet shiten me çmime të veçanta. Për çdo blerës, dyqani ofron ulje çmimi në varësi të shumës totale të produkteve të blera:

- Për shumën deri në 1000 denarë, nuk ka ulje.
- Për shumën nga 1000 deri në 5000 denarë, aprovohet ulja prej 5%.
- Për shumën mbi 5000 denarë, aprovohet ulja prej 10%.

Dyqani gjithashtu ofron një ulje shtesë prej 2% për të gjithë blerësit që paguajnë faturat e tyre menjëherë.

- Shkruani funksionin që përfaqëson çmimin që paguan blerësi në varësi të shumës së parave që ka shpenzuar (pa zbritjen për pagesën e menjëhershme).
- Sa do të paguajë blerësi që ka shpenzuar 6000 denarë?

Zgjidhje:

- a) Paraqitja me fjalë: Së pari, duhet të shqyrtojmë si varet shuma që paguan blerësi nga vlera që ka shpenzuar:

- Nëse ka shpenzuar deri në 1000 denarë, nuk ka ulje.
- Nëse ka shpenzuar ndërmjet 1000 dhe 5000 denarë, ulja është 5%.
- Nëse ka shpenzuar mbi 5000 denarë, ulja është 10%.

Pastaj, nëse blerësi paguan menjëherë, i aprovohet një ulje shtesë prej 2%.

Paraqitja me simbole:

Le të jetë P vlera totale që e ka shpenzuar blerësi dhe nga ajo varet shuma që do të paguajë në kasë $f(P)$.

Funksioni për çmimin total do të jetë:

$f(P) = P$ nëse blerësi ka harxhuar 1000 ose më pak se 1000 denarë.

$f(P) = 0,95 \cdot P$ nëse ka harxhuar 1000 denarë ose më pak se 5000 denarë, përfshij edhe 5000 denarë.

$f(P) = 0,90 \cdot P$ nëse ka harxhuar më shumë se 5000 denarë.

$$\text{ose shkurt } f(P) = \begin{cases} P & \text{nëse } P \leq 1000 \\ 0,95 \cdot P, & \text{nëse } 1000 < P \leq 5000 \\ 0,90 \cdot P, & \text{nëse } P > 5000 \end{cases}$$

Nëse blerësi paguan menjëherë, i aprovohet ulje shtesë prej 2% nga vlera që paguan, pas realizimit të uljes paraprake. Kjo do të thotë se nga çmimi përfundimtar hiqet 2% e vlerës së përgjithshme pas realizimit të uljeve.

- b) Llogaritja e vlerës së funksionit për një shembull konkret: nëse blerësi ka shpenzuar 6000 denarë, sipas rastit (a) vlen: $f(6000) = 0,90 \cdot 6000$.

Më pas, aplikohet ulja prej 2% për pagesën e menjëhershme të 5400 denarëve:

$$0,98 \cdot 5400 = 5292 \text{ denarë.}$$

Detyra 2

Jovana shet lule. Ky është ekstrakti i çmimoreve për një lule nga secili lloj: Gjatë kësaj, nëse blerësi blen më shumë se 5 lule, i miratohet ulja prej 10%. Nëse blen më shumë se 10 lule, ulja rritet në 15%. Jovana ka vendosur të ofrojë një ulje shtesë prej 5% për blerësit që paguajnë menjëherë.

Trëndafil: 300 denarë.
Lale: 150 denarë.
Orhide: 500 denarë.

- Shkruani funksionin që përfaqëson çmimin që paguan blerësi në varësi të numrit të luleve të blera (pa uljen për pagesën e menjëhershme).
- Llogarit çmimin total për blerësin që ka blerë 8 lale, 4 orhide dhe 2 trëndafila, nëse ka vendosur të paguajë menjëherë.

Detyra 3

Gjatë zhytjes, shtypja e ujit rritet me rritjen e thellësisë ku ndodhet zhytësi. Dendësia e ujit të detit është 1020 kg/m^3 , prandaj për çdo 10 metra shtypja rritet për 1.02 bar (bar është njësi matëse për shtypjen). Lidhja për disa vlera fillestare është paraqitur në tabelën e mëposhtme:

Thellësia d (m)	10	20	30	40	50
Shtypja P (bar)	1,02	2,04	3,06	4,08	5,1

A është e mundur që në një thellësi të caktuar të ketë dy vlera të ndryshme të shtypjes? Shkruani funksionin që tregon varësinë e shtypjes nga thellësia e zhytjes dhe më pas përcaktoni sa është shtypja e ujit në thellësi prej 34 metrash?

A mund të jepni një shembull nga jeta e përditshme që mund të përfaqësohet me një funksion matematikor? Përpiloni të përpiloni një tekst për një problem në kontekst real për të cilin do të përdoret funksioni:

a) $f(x) = 320 - 5x$ b) $f(x) = 320 + 5x$

Bëni një hartë mendore duke filluar me nocionin FUNKSION. Më pas vlerëso veten duke shfrytëzuar njësien mësimore.

Punë e pavarur

- Shprehni me fjalë funksionin $f(x) = 2x + 5$ (shpjegoni çfarë do të thotë secila pjesë e këtij funksioni).
- Jepet funksioni $f(x) = 2x - 1$. Përcaktoni vlerën e $f(x)$ për këto vlera të x : $x = 3$, $x = -2$, $x = 0$.
- $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ është funksion i njohur në matematikë. Shpjegojeni me fjalë dhe shkruani me formulë.
- Është dhënë funksioni $f(x) = 3x - 4$. Shkruani pesë vlera të funksionit (për $x = 1, 2, 3, 4, 5$).
- Nëse temperatura në qytet rritet për 3°C çdo orë, duke filluar nga 15°C , si do ta shkruanit funksionin për temperaturën me kalimin e kohës?
- Flokët e Janës janë 25 cm të gjata. Çdo muaj rriten nga 1,5 cm. Shkruani funksionin F për varësinë e gjatësisë së flokëve të Janës pas m muajsh. Llogarit gjatësinë e flokëve të Janës pas 5 muajsh.
- a) Në kopshtin e Milloshit kishte 40 fidanë perimesh. Por, për shkak të kushteve të këqija të motit, filluan të thahen nga 3 në ditë. Shkruani me formulë se si varet numri i fidanëve F nga numri i ditëve d . Pas sa ditësh do të thahen të gjithë fidanët?
b) Me fjalë shkruani funksionin që jepet me $F = 15 + 4d$ (nëse F , d janë shenja për numrin e fidanëve dhe të ditëve) në kopshtin e Milloshit.

8. Në tabelë janë dhënë vlerat për rrugën e përshkruar, në varësi të kohës, të udhëtimit të Lejlës. Shkruani varësinë e rrugës nga koha.

Koha (orë)	0	1	2	3	4
Rruga (kilometra)	0	50	100	150	200

9. Omeri realizon një eksperiment kimik. Reaksioni që ai vëzhgon përfshin ngrohjen e një substance, gjatë së cilës temperatura rritet me 2°C çdo minutë. Nëse temperatura fillestare e substancës ka qenë 18°C , shkruani funksionin me të cilin mund të llogaritni temperaturën T (në gradë) në varësi të kohës t (në minuta)?

Paraqitja grafike e funksionit linear dhe çiftet koordinative

Funksionet lineare janë një nga modelet më të zakonshme matematikore që do t'i përdorni në jetën e përditshme. Ato paraqesin lidhjen midis dy madhësive. Për shembull, masa totale e më shumë produkteve të njëjta në një market është funksion linear në varësi të masës së një produkti të vetëm; kur udhëtoni me një shpejtësi konstante, distanca që përshkon në një kohë të caktuar është funksion linear i kohës; çmimi i transportit me taksi është vlerë e një funksioni linear që varet nga kilometrat e përshkruar.



Shembulli 1

Musai shet fletore. Ai filloi me 200 denarë dhe fiton nga 50 denarë për çdo fletore të shitur. Shkruani formulën për funksionin që lidh fitimin total $f(x)$ me numrin e fletoreve të shitura x .

Zgjidhje:

$f(x) = 50x + 200$, ku: x është numri i fletoreve të shitura, $f(x)$ është fitimi i përgjithshëm, 50 është fitimi për një fletore dhe 200 është shuma fillestare.

Funksioni linear është varshmëria ndërmjet dy ndryshoreve që shprehet me formulën: $f(x) = ax + b$, ku x është ndryshorja e pavarur, $f(x)$ është ndryshorja e varur dhe shpesh e shënojmë me y (pra $y = ax + b$), a dhe b janë numra të dhënë dhe $a \neq 0$.

Shembulli 2

Është dhënë funksioni linear: $y = 2x - 3$

- Gjeni sa është y për: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.
- Shpjegoni se si çftet e fituara të koordinatave e paraqesin funksionin.

Zgjidhje:

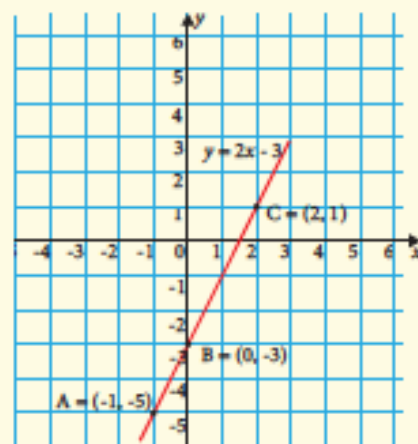
a) Njehsimi i secilës vlerë të y për vlerat e dhëna të x është paraqitur me tabelën:

x	-1	0	2
Njehsimi i y	$y = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3$	$y = 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3$	$y = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3$
y	-5	-3	1

Nga tabela mund të vërejmë çiftet në vijim të koordinatave: $(-1, -5)$, $(0, -3)$, $(2, 1)$.

Çift koordinatash është çifti i numrave (x, y) që përcakton pozicionin e një pike në sistemin koordinativ.

Numri i parë në çdo çift koordinativ përfaqëson – koordinatë (abscisën), që do të thotë se përfaqëson vlerën e ndryshores së pavarur x . Numri i dytë në çdo çift koordinativ përfaqëson – koordinatë (ordinatën), që do të thotë se përfaqëson vlerën e ndryshores së varur y . Nëse çiftet koordinative të fituara nga shembulli 2 i vendosim në sistemin koordinativ, do të fitojmë pikat që i përkasin secilit çift. Duke lidhur këto pika fitohet drejtëza që përfaqëson grafikun e funksionit linear.



Shembulli 3

Çifti i koordinatave $(1, 5)$, a është pikë e grafikut të funksionit linear nga shembulli 2 ($y = 2x - 3$)?

Zgjidhje:

Nëse pika $(1, 5)$ i përket grafikut të funksionit $y = 2x - 3$ mund të provohet në dy mënyra, edhe atë:

Mënyra I: Meqenëse grafiku i funksionit $y = 2x - 3$ është vizatuar, mund ta gjejmë pikën me koordinatat $(1, 5)$. Duhet të verifikojmë a thua pika shtrihet në drjtëzën që është grafik i funksionit $y = 2x - 3$?

Mënyra II: Zëvendësojmë për $x = 1$, ndërsa për $y = 5$, në ekuacionin $y = 2x - 3$ të funksionit linear dhe fitojmë: $5 = 2 \cdot 1 - 3$, $5 \neq -1$. Pasi fitojmë barazim jo të vërtetë numerik, çifti i renditur nuk është zgjidhje e ekuacionit të funksionit linear, që do të thotë se pika me koordinatat $(1, 5)$ nuk i përket drejtëzës (grafikut të funksionit linear) $y = 2x - 3$.

Detyra 1

Kontrolloni se cilat nga çiftet e koordinatave kënaqin kushtet e funksionit linear $y = x - 1$?

- a) $(1, 0)$ b) $(2, 2)$ c) $(-1, 2)$ ç) $(-2, -3)$ d) $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

Detyra 2

Vizatoni grafikun e funksioneve lineare:

- a) $y = 3x$ b) $y = 2x - 4$ c) $y = -x + 2$
 ç) $y = -4x$ d) $y = -3x - 1$

Detyra 3

Kur telefonon Simeoni, ai paguan një çmim bazë prej 50 denarë, plus 10 denarë për çdo minutë bisedë. Bëni një tabelë për çmimin total për 1, 2, 3 dhe 4 minuta bisedë.

Shembulli 4

Në një restorant, çmimi i ushqimit varet nga numri i shujtave që porositen. Vlera e faturës mund të llogaritet me funksionin $y = 3x + 5$, ku x është numri i shujtave, ndërsa y është çmimi total në euro.

- a) Gjeni çiftet koordinative për $x = 1$, $x = 3$ dhe $x = 5$.
 b) Vizatoni grafikun e këtij funksioni në sistemin koordinativ.
 c) Çfarë përfaqëson vlera 5 në këtë situatë? Çfarë do të thotë 3?
 ç) Nëse një student porosit 4 shujta, sa do të jetë fatura e tij?

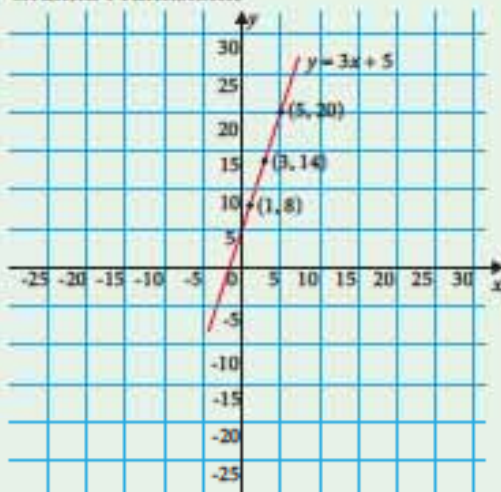
Zgjidhje:

- a) E njehsojmë vlerën e y për çdo vlerë të dhënë të x , për $x = 1$, $y = 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$,
 $x = 3$, $y = 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$ dhe $x = 5$, $y = 3 \cdot 5 + 5 = 15 + 5 = 20$. Mund të plotësojmë tabelën:

Numri i shujtave x	1	3	5
Çmimi total në euro y	8	14	20

Nga tabela mund të shkruani çiftet e koordinatave: $(1, 8)$, $(3, 14)$, $(5, 20)$.

- b) Grafiku i funksionit



- c) Vlera 5 në ekuacion përfaqëson çmimin fillestar, që do të thotë se pavarësisht sa shujta do të porositen, çmimi fillestar është 5 euro (për shembull, për rezervimin e tavolinës në restorant). Numri 3 para ndryshores x , d.m.th. para numrit të shujtave të porositura, është çmimi për 1 shujtë (pra, 1 shujtë kushton 3 euro).
- ç) Nëse studenti porositi 4 shujta, për të llogaritur shumën totale, zëvendësojmë $x = 4$ në funksionin $y = 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$. Kështu, fatura për 4 shujta do të jetë gjithsej 17 euro.

Detyra 4

Valbona kursen 200 denarë çdo javë. Fillimisht kishte 500 denarë.

- Shkruani funksionin që përshkruan kursimet e Valbonës.
- Bëni një tabelë për pesë javët e para.
- Vizatoni grafikun.

Vizatoni grafikët e funksioneve lineare $y = x + 3$ dhe $y = -x - 3$. Shpjegoni dallimin mes grafikëve të dy funksioneve.

Në fletore shkruani përgjigjet dhe shpjegimet.

1. Kuptoj çfarë është funksioni linear. Po/Jo
(Shpjegoni se si e kuptoni funksionin.)
2. Di si të llogaris y për një vlerë të caktuar të x në funksion. Po/Jo
(Shkruani një shembull.)
3. A mund të vizatohet grafikun e funksionit duke vendosur çiftet koordinative dhe duke lidhur pikat? Po/Jo
(Përshkruani si e vizatuat grafikun.)

Sa i sigurt ndihem për këtë mësim?

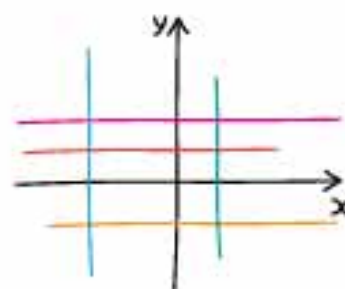
Shumë i sigurt / Pjesërisht i sigurt / Nuk jam i sigurt (Shpjego pse.)

Punë e pavarur

1. Në një dyqan elektronik, çmimi i televizorëve zvogëlohet me 500 denarë për çdo ditë pas fillimit të uljeve.
 - a) Nëse çmimi fillestar i televizorit ishte 15000 denarë, shkruani formulën për çmimin e televizorit në varësi të ditës x .
 - b) Gjeni çmimin pas 3, 5 dhe 7 ditësh.
 - c) Vizatoni grafikun e funksionit.
2. Në një kompani autobusësh, shpenzimi për udhëtim nga qyteti A në qytetin B llogaritet me formulën $y = 30x + 10$, ku x është numri i kilometrave, ndërsa y është shpenzimi në denarë.
 - a) Gjeni shpenzimin për 100 kilometra dhe për 250 kilometra.
 - b) Vizatoni grafikun e funksionit.
3. Ristoja punon në një dyqan elektronik. Paga e tij bazë ditore është 1000 denarë dhe merr 200 denarë shtesë për çdo produkt të shitur.
 - a) Shkruani formulën për fitimin e tij y në varësi të numrit të produkteve të shitura.
 - b) Gjeni sa do të fitojë nëse shet 3, 4 dhe 6 produkte.
 - c) Vizatoni grafikun.
4. Në librarinë ku blen Isaku, për më shumë se 3 libra të blera ai fiton një ulje prej 5 euro në çmimin total. Formula për çmimin për blerjen e librave, nëse një libër kushton 4 euro, është $y = 4x - 5$. Gjeni çmimin për 5 dhe 7 libra dhe vizatoni grafikun.
5. Marrja me qira e një biçiklete kushton 100 denarë në ditë. Përveç kësaj, çdo person që dëshiron të marrë biçikletë me qira duhet të paguajë edhe anëtarësinë prej 50 denarë.
 - a) Shkruani formulën për çmimin total që paguan një person kur merr biçikletë me qira për disa ditë.
 - b) Sa do të paguajë një person që merr biçikletë me qira për 2 ditë? Po për 4 ditë?

Grafikët e funksioneve lineare paralele me boshtin x ose boshtin y

Në këtë njësi mësimore do të njiheni me funksione grafikët e të cilëve janë paralele me boshtin x ose me boshtin y . Do të mësoni si t'i dalloni këto funksione dhe si t'i vizatoni grafikët e tyre. Funksionet që janë paralele me boshtin x kanë vlerë konstante për y , ndërsa funksionet që janë paralele me boshtin y kanë vlerë konstante për x . Kjo njësi mësimore do të ndihmojë të kuptoni karakteristikat themelore të këtyre funksioneve dhe të njiheni me mënyrën e paraqitjes së tyre përmes grafikëve.



Shembulli 1

Përpiloni një hartë mendore për funksionin linear. Kontrolloni hartën e juaj duke shfrytëzuar njësinë paraprake mësimore.

Detyra 1

Vizatoni grafikun e funksionit linear $y = 2x - 3$. Sa është koeficienti a para ndryshores së pavarur x dhe sa është koeficienti b ?

Shembulli 2

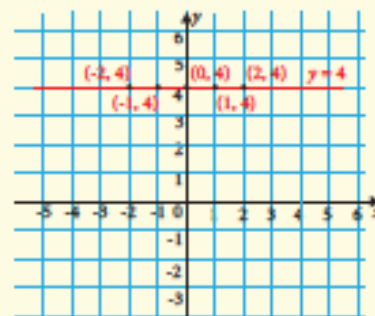
Vizatoni grafikun e funksionit $y = 0 \cdot x + 4$.

Zgjidhje:

Për funksionin $y = 0 \cdot x + 4$, koeficienti para ndryshores së pavarur x është 0. Para se të vizatojmë grafikun, do të bëjmë një tabelë. Meqë çdo vlerë për x e shumëzuar me 0 është zero, atëherë vlera e y është 4 për çdo vlerë të x .

x	-2	-1	0	1	2
y	4	4	4	4	4

Secilit çift të fituar të koordinatave $(-2, 4)$, $(-1, 4)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ i shoqërojmë pika përkatëse në sistemin koordinativ. Duke i lidhur këto pika, fitojmë një drejtëz horizontale, paralele me boshtin x . Formulën e funksionit mund ta shkruajmë edhe si $y = 4$. Ky është funksion konstant, sepse për çdo vlerë të x , vlera e y është 4.



Shembulli 3

Vizatoni grafikun e funksionit $x = -2$.

Zgjidhje:

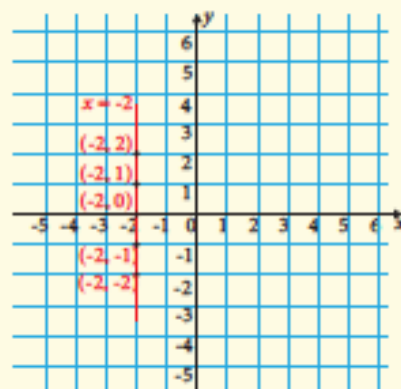
Në funksionin $x = -2$, x ka vlerë konstante.

Kjo do të thotë se për cilëndo vlerë të y , x merr vlerën -2 .

Kjo mund të paraqitet me tabelë për disa vlera të y :

x	-2	-2	-2	-2	-2
y	-2	-1	0	1	2

Për secilin çift të koordinatave $(-2, -2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$ gjejmë një pikë përkatëse në sistemin koordinativ. Me bashkimin e pikave fitojmë drejtëz vertikale, paralele me boshtin y .



Detyra 2

Vizatoni grafikët e funksioneve:

- a) $y = -2$ b) $x = 3$ c) $x = 1\frac{1}{2}$ ç) $y = 5$ d) $y = -2\frac{1}{3}$

Shembulli 4

Në një laborator testohet një pajisje që mban temperaturë të qëndrueshme, konstante, në një hapësirë të mbyllur. Pavarësisht kohës që kalon, temperatura është gjithmonë 22°C .

- a) Shkruani funksionin $T(t)$ që përshkruan temperaturën në varësi të kohës t , ku t është numri i orëve të kaluara (do ta konsiderojmë negativ – para fillimit të matjes).
b) Vizatoni grafikun e funksionit dhe shpjegoni se çfarë forme ka.

Zgjidhje:

- a) Funksioni është $T(t) = 22$, ku t është numri i orëve që kanë kaluar (e konsiderojmë edhe numër negativ – para fillimit të matjes).

- b) Kjo do të thotë se për çdo orë gjatë matjes dhe edhe para fillimit të saj, temperatura mbetet në vlerën 22°C . Për të vizatuar grafikun, shënojmë disa pika në sistemin koordinativ: $(-2, 22), (-1, 22), (0, 22), (1, 22), (2, 22), (3, 22)$. Duke i lidhur këto pika, fitojmë grafikun e funksionit $y = 22$.

Grafiku do të jetë një drejtëz horizontale, paralele me boshtin x , që tregon se temperatura mbetet konstante.



Mendoni për dy funksione: njëri shkruhet në formën $y = m$ dhe tjetra në formën $x = n$. Si duket grafiku i secilit prej këtyre funksioneve (me cilin bosht janë paralele dhe pse)? Si mund t'u ndihmojë kjo njohuri në zgjidhjen e problemeve reale?

Në fletoren tuaj zgjidhni detyrat:

1. Cili është ndryshimi mes funksioneve të formës $y = b$ dhe $x = a$?
2. Cilët nga funksionet: $y = -1, x = -3, x = 2, y = 4.5$ kanë grafik, drejtëz paralele me boshtin y ?
3. Vizatoni grafikët e funksioneve $y = -3$ dhe $x = 2$.
4. Shkruani një problem nga jeta e përditshme që mund të zgjidhet duke përdorur një nga funksionet $y = b$ ose $x = a$.

Kthehu te mësimi dhe kontrolllo nëse i keni zgjidhur saktë detyrat.

Nëse ke 2 detyra të pasakta, duhet të përqendrohesh të mësonish rishtas njësinë mësimore dhe ushtrimet e grafikëve të funksioneve lineare të formës $y = b$ dhe $x = a$.

Nëse ke zgjidhur saktë 3 ose 4 ushtrime, konsiderohet se je i suksesshëm në këtë njësi mësimore.

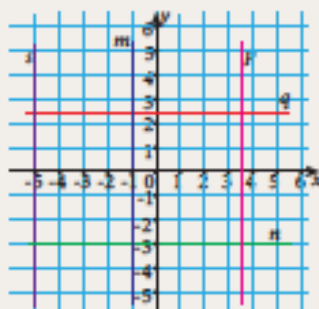
Punë e pavarur

1. Në një sallë shkolle, kondicioneri është vendosur në atë mënyrë që temperatura në dhomë të mbahet vazhdimisht në 17°C , pa marrë parasysh kohën e ditës.
 - a) Shkruani funksionin që përshkruan temperaturën në dhomë.
 - b) Vizato grafikun e funksionit.
2. Në një restorant lokal, specialiteti i ditës gjithmonë shitet me një çmim fiks prej 150 denarësh, pa marrë parasysh ditën.
 - a) Shprehni si funksion lidhjen mes çmimit dhe ditës.
 - b) Vizatoni grafikun e funksionit.

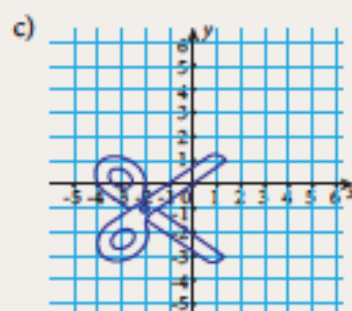
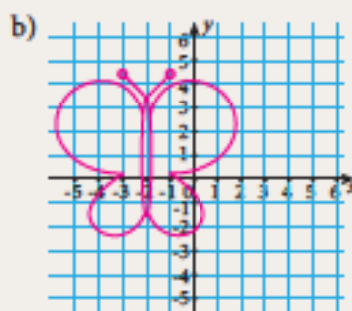
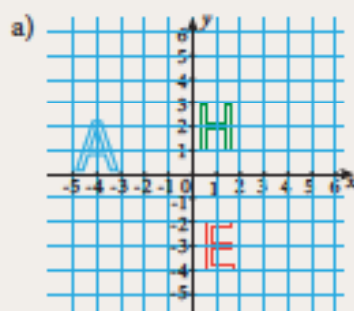
3. Në park, automati për pije të ngrohta gjithmonë pranon saktësisht 100 denarë, pa marrë parasysh llojin apo numrin e pijeve që mund të nxirren nga ai.

- a) Shkruani një funksion që përshkruan shumën hyrëse në automat.
b) Vizatoni grafikun e funksionit.

4. Shkruani barazimet e drejtëzave të dhëna.



5. Shkruani barazimet e boshteve të simetrisë të formave në vijim:



6. a) Shënoni pikat $(-4, 3)$, $(-4, 5)$, $(-4, 0)$, $(-4, 2)$, $(-4, -3)$ në sistemin koordinativ. Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nëpër këto pika.
b) Shënoni pikat $(-4, 5)$, $(-3, 5)$, $(2, 5)$, $(0, 5)$, $(4, 5)$ në sistemin koordinativ. Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nëpër këto pika.
7. Në sistemin koordinativ, vizatoni një figurë për të cilën drejtëzat $x = 3$ dhe $y = 4$ janë boshte të simetrisë.
8. Pikat $M(2, 3)$, $N(-1, 5)$, $P(-4, 3)$, $Q(-1, -1)$ janë kulmet e një deltoidi.
a) Vizatoni deltoidin në sistemin koordinativ.
b) Shkruani ekuacionet e drejtëzave në të cilat shtrihen diagonalet e deltoidit.
9. Janë dhënë pikat $A(2, 4)$, $B(2, -3)$, $C(1, 4)$, $D(2, -2)$, $E(2, 6)$. Cila nga pikat nuk i përket grupit? Shpjegoni arsyen.

T E M A

4

MATJET



Imagjinoni një ditë në të cilën nuk mund të matet asgjë. Si do ta dinim sa është ora, sa kilometra kemi përshkuar, çfarë mase ka një objekt apo sa kohë duhet të ziejmë çajin? Matja është proces me të cilin i krahasojmë madhësitë e objekteve me njësi matëse të zgjedhura dhe në këtë mënyrë e përcaktojmë gjatësinë, masën, vëllimin, kohën apo ndonjë madhësi tjetër

“Matja është art i të qenurit i saktë – pa të gjithçka do të ishte vetëm e përafërt”

Rezultatet e mësimit

Pas shtjellimit të kësaj teme do të jeni të aftë të:

- përzgjidhni njësitë matëse të duhura për vlerësim, matje, llogaritje dhe zgjidhje problemesh në kontekst të përditshmërisë
- vizatoni dhe interpretoni grafikë nga jeta reale, për shembull, grafikun për kohën e udhëtimit, përfshij më shumë se një fazë.
- zgjidhni probleme nga përditshmëria që përfshijnë llogaritjen e perimetrit të katërkëndëshit, syprinën e formave të ndërlikuara 2D dhe vëllimin e kuadrit dhe kubit.

Instrumentet për matjen e gjatësisë dhe njësitë matëse. Mikroni

Në këtë mësim do të njihesh me dy lloje instrumentesh matës që përdoren për matjen e gjatësisë dhe ato janë instrumentet analoge dhe digjitale. Këto instrumente janë thelbësore për saktësinë dhe precizitetin në fusha të ndryshme shkencore, teknike dhe industriale.

Instrumentet analoge për matje, siç janë vizoret matëse dhe kaliperat (nonjusat), janë të zakonshme dhe të lehta për t'u përdorur, por kërkojnë kujdes dhe interpretim gjatë leximit. Instrumentet digjitale, nga ana tjetër, përdorin ekrane elektronike dhe tregojnë automatikisht vlera të sakta, gjë që i bën më moderne dhe të përshtatshme për matje të sakta.



Do të përqendrohemi veçanërisht në matjen e gjatësisë dhe trashësisë shumë të vogla, që kërkojnë përdorimin e instrumenteve mikronikë. Instrumenti mikronik është ideal për matjen e dimensioneve shumë të vogla, siç është trashësia e materialeve ose preciziteti i pjesëve në makineri dhe elektronikë. Gjatë kësaj do të njihesh me njësinë matëse mikrometër dhe mënyrën e shndërrimit të saj në metra dhe milimetra.

Shembulli 1

Milani vendosi të bëjë një kornizë për fotografi. Për këtë do t'i nevojiten gjatësi të ndryshme të dërrasave prej druri. Ai ka instrumente matëse me njësi matëse për gjatësi në centimetra dhe metra. Ndihmoni që të bëjë llogaritjet dhe përgjigjuni pyetjeve:

- Nëse Milani ka një dërrasë druri që është e gjatë 3 metra dhe e ndan në 100 pjesë, sa centimetra do të ketë secila pjesë?
- Milani duhet të përdorë dy dërrasa: njëra është 1.5 metra, ndërsa tjetra është 150 centimetra. Sa janë të gjata bashkë në centimetra? (Shkruani procedurën dhe rezultatin.)
- Nëse Milani duhet të blejë 5 dërrasa, secila e gjatë 2 metra, sa do të jetë gjatësia totale e dërrasave në centimetra?
- Shkruani gjatësinë totale të dërrasave nëse Milani ka një dërrasë prej 2 metrash dhe një prej 850 centimetrash. Si do ta shënonit këtë gjatësi në metra dhe centimetra?
- Milani ka vlerësuar se çdo dërrasë druri është e gjatë rreth 4 metra. Nëse çdo dërrasë ka gjatësi të saktë prej 3.7 metrash, llogaritni gjatësinë totale të 5 dërrasave të tilla. Sa është dallimi ndërmjet gjatësisë së vlerësuar dhe gjatësisë së saktë totale?

Zgjidhje:

- a) $3\text{ m} = 300\text{ cm}$, $300\text{ cm} : 100 = 3\text{ cm}$.
 b) $1,5\text{ m} = 150\text{ cm}$, gjatësia totale $150\text{ cm} + 150\text{ cm} = 300\text{ cm}$.
 c) $5 \cdot 2\text{ m} = 10\text{ m} = 1000\text{ cm}$.
 ç) $2\text{ m} = 200\text{ cm}$, $200\text{ cm} + 850\text{ cm} = 1050\text{ cm}$, $1050\text{ cm} = 10\text{ m } 50\text{ cm}$.
 d) Milani vlerëson se secila dërrasë është 4 metra. Pra, gjatësia e vlerësuar totale është $5 \cdot 4\text{ m} = 20\text{ m}$.

Nëse secila dërrasë është realisht 3,7 m, atëherë të 5 dërrasat kanë gjatësi totale: $5 \cdot 3,7\text{ m} = 18,5\text{ m}$.
 Dallimi mes gjatësisë së vlerësuar dhe gjatësisë së saktë të plotë është $20\text{ m} - 18,5\text{ m} = 1,5\text{ m}$.

Detyra 1

Qyteti planifikon të ndërtojë një urë të vogël mbi një përrua për një shteg biçikletash. Ju jeni pjesë e ekipit që duhet të matë dhe të përcaktojë përmasat e sakta për urën. Në lidhje me ndërtimin janë dhënë këto të dhëna:

- Gjerësia e përroit është 4,25 m.
 - Ura ka gjatësi e cila në të dy skajet është për 0,5 m më e madhe se gjerësia e përroit.
 - Gjerësia e urës duhet të jetë 3 herë më e vogël se gjatësia e saj.
- a) Cilat instrumente matëse do të përdorësh për të matur gjatësitë në terren?
 b) Sa do të jetë gjatësia totale e urës?
 c) Sa do të jetë gjerësia e urës?
 ç) Nëse përdorni metër me ndarje milimetrike, si do ta paraqisje matjen e saktë në centimetra dhe milimetra?

Shembulli 2

Aneta është adhuruese e biologjisë dhe dëshiron të studiojë dallimet midis fibrave të ndryshme bimore. Ajo dëshiron të masë trashësinë e fibrës nga një gjeth bari. Mësuesi i saj i thotë se trashësia e një fibre zakonisht matet në mikronë ($\mu\text{ - mi}$).

1 mikron (μ) është sa e një milionta pjesë e metrit.

Duke përdorur instrumente të përshtatshme për matjen e gjatësive shumë të vogla, Aneta ka arritur në përfundim se trashësia e fibrës së barit është 50 μm .

Gjatësia e miliontës pjesë të metrit në SI është emërtuar mikrometër, shënohet me μm ($1\text{ mm} = 1000\text{ }\mu\text{m}$).

Shënim më i shkurtër i mikrometrës është mikron, përkatësisht $1\mu\text{m}$ ose 1μ . Shënimi i kësaj gjatësie me mikron (μ) është larguar nga përdorimi qysh nga viti 1967.

- a) Shndërroni trashësinë nga mikronë në milimetra.
- b) Nëse trashësia e një floku njerëzor është afërsisht $70\text{ }\mu\text{m}$, cila fibrë është më e hollë, ajo e gjethit apo ajo njerëzore? Sa është ndryshimi në mikronë midis dy fibrave?
- c) Për të imagjinuar madhësinë, llogaritni sa fibra të tilla mund të vendosen rresht, njëra pas tjetrës, për të formuar një gjatësi prej 1 milimetri.
- ç) Pse është e rëndësishme në shkencë të përdoren mikrometra për të matur këto dimensione shumë të vogla?

Zgjidhje:

- a) Duke përdorur lidhjen midis milimetrave dhe mikronëve, nëse trashësia e fibrës është $50\text{ }\mu\text{m}$, atëherë: $50\text{ }\mu\text{m} = (50 : 1000)\text{ mm} = 0,05\text{ mm}$. Trashësia e fibrës është $0,05\text{ mm}$.
- b) Nëse trashësia e flokut të njeriut është $70\text{ }\mu\text{m}$, ndërsa trashësia e fibrës së barit është $50\text{ }\mu\text{m}$, atëherë ndryshimi midis tyre është: $70\text{ }\mu\text{m} - 50\text{ }\mu\text{m} = 20\text{ }\mu\text{m}$. Fija e barit është $20\text{ }\mu\text{m}$ më e hollë.
- c) Për ta imagjinuar madhësinë, duhet të llogarisësh sa fibra prej $50\text{ }\mu\text{m}$ mund të vendosen njëra pas tjetrës për të formuar një gjatësi prej 1 mm. Duke ditur që: $1\text{ mm} = 1000\text{ }\mu\text{m}$ kjo jep $1000\text{ }\mu\text{m} : 50\text{ }\mu\text{m} = 20$.
Pra, kur 20 fibra prej $50\text{ }\mu\text{m}$ vendosen rresht, formohet një gjatësi prej 1 mm.
- ç) Përdorimi i mikronit (μm) në shkencë është shumë i rëndësishëm për matjen e saktë të dimensioneve shumë të vogla, si strukturat qelizore, objektet mikroskopike apo fibrat. Mikronët lejojnë një precizitet të lartë në matjen e gjërave që janë shumë të vogla për t'u matur me instrumente të zakonshme që matin centimetra ose milimetra. Kjo është veçanërisht e dobishme në biologji, mjekësi dhe teknologji, ku detajet në mikro nivel janë të rëndësishme për kuptimin e proceseve dhe funksioneve.

Detyra 2

Një eksperiment shkencor kërkon përcaktimin e saktë të dimensioneve të një objekti shumë të vogël në formë kuadri. Matjet janë dhënë në njësi të ndryshme: gjatësia e objektit është $2500\text{ }\mu\text{m}$, gjerësia e objektit është $0,75\text{ mm}$ dhe lartësia e objektit është $0,05\text{ cm}$.

- a) Shndërroni të gjitha dimensionet në milimetra.
- b) Shndërroni të gjitha dimensionet në mikronë.
- c) Sa herë gjatësia e objektit është më e madhe se lartësia?

Shembulli 3

Një inxhinier i elektronikës prodhon një pllakë të printuar për një pajisje elektronike. Dimensionet e pllakës janë dhënë në njësi të ndryshme: gjatësia e pllakës është 15 cm , gjerësia e pllakës është 85 mm dhe trashësia e pllakës është $1200\text{ }\mu\text{m}$.

- a) Shndërroni të gjitha dimensionet në milimetra.
- b) Shndërroni të gjitha dimensionet në mikronë.

- c) Nëse çdo shtresë e pllakës ka trashësi prej $1200\ \mu\text{m}$, sa shtresa, më së shumti, mund të vendosen në një kuti me lartësi $2\ \text{cm}$?

Zgjidhje:

- a) Shndërrimi në milimetra:

$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}, 1\ \mu\text{m} = 0,001\ \text{mm}$$

- Gjatësia: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10)\ \text{mm} = 150\ \text{mm}$
- Gjerësia: $85\ \text{mm}$ – është në milimetra
- Trashësia: $1200\ \mu\text{m} = (1200 \cdot 0,001)\ \text{mm} = 1,2\ \text{mm}$

- b) Shndërrimi në mikronë:

$$1\ \text{mm} = 1000\ \mu\text{m}, 1\ \text{cm} = 10000\ \mu\text{m}$$

- Gjatësia: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10000)\ \mu\text{m} = 150000\ \mu\text{m}$
- Gjerësia: $85\ \text{mm} = (85 \cdot 1000)\ \mu\text{m} = 85000\ \mu\text{m}$
- Trashësia: $1200\ \mu\text{m}$ – veçse është në mikronë

- c) Njehsimi i numrit të shtresave:

- Lartësia maksimale e kutisë: $2\ \text{cm} = 20\ \text{mm}$
- Trashësia e një shtrese: $1,2\ \text{mm}$

$$\text{Numri i shtresave} = 20\ \text{mm} : 1,2\ \text{mm} = 16,6$$

Pasi nuk mund të ketë pjesë të shtresës, numri maksimal i shtresave është 16.

Detyra 3

Petri dëshiron të mat trashësinë e tri shtresave të ndryshme të veshjeve që përdor gjatë dimrit. Për këtë ai përdor mjete matëse të veçanta dhe fiton matjet e mëposhtme:

- Trashësia e shtresës së brendshme të xhaketës dimërore: $450\ \mu\text{m}$.
 - Trashësia e shtresës së xhupit dimëror: $800\ \mu\text{m}$.
 - Trashësia e shtresës së jashtme të xhaketës dimërore: $1250\ \mu\text{m}$.
- a) Shndërroni trashësitë e të tri shtresave nga mikronë (μm) në milimetra (mm).
- b) Cila nga veshjet është më e trashë? Cila është më e hollë? Sa është diferenca në mikronë midis veshjes më të hollë dhe asaj më të trashë?
- c) Sa shtresa nga secila do të duhet të vendosen njëra mbi tjetrën që trashësia e kombinimit të arrijë $5\ \text{cm}$?
- d) Shpjegoni pse është e rëndësishme të përdoren mikronë (μm) për matjen e trashësisë së materialeve të ndryshme, siç janë veshjet. Si mund kjo të ndihmojë në dizajnimin e veshjeve dimërore?

Detyra 4

Lexoni gjatësinë e treguar në mjetet e ndryshme matëse dhe për secilin mjet shkruani nëse është analog apo digjital.



Petri, i cili jeton në një rajon të ftohtë, duhet të zgjedhë se cilën veshje dimërore do ta veshë për t'u mbrojtur nga moti i ftohtë. Ai ka matur trashësitë e tri shtresave të veshjeve (xhaketës polare, xhupit dimëror dhe xhaketës dimërore), por dëshiron të dijë se si ndikon trashësia e veshjes në izolimin e saj. Nëse veshja që ka trashësi më të madhe ruan ngrohjen më efektivisht, si do ta përdorni këtë informacion për t'i ndihmuar Petrit të zgjedhë veshjen më të mirë dimërore për kushte të ndryshme të temperaturës?

Shpjegoni se si njohuritë për mikronët dhe trashësinë e shtresave mund të ndihmojnë në marrjen e vendimit për veshjen në kushtet dimërore. Hulumtoni për karakteristikat e llojeve të ndryshme të veshjeve në varësi të trashësisë.

Përgjigjuni pyetjeve në fletoren tuaj, pastaj ndani me shokët e klasës.

1. A e kuptova se çfarë është mikroni (μm) dhe si përdoret në matjen e dimensioneve të vogla? (Po / Jo)
Nëse jo, cilat pjesë të shpjegimit ose zgjidhjes së problemit nuk i kuptova mirë?
2. A arrita t'i shndërroj saktë njësitë e matjes (mikronët në milimetra)? (Po / Jo)
Nëse jo, si do ta përmirësoja procesin e shndërrimit?
3. Çfarë mësova për rëndësinë e matjes në mikronë në situata të ndryshme shkencore dhe praktike?
Shkruani një përgjigje të shkurtër për të përmbledhur atë që ke mësuar.

Punë e pavarur

- Shndërroni:
 - 3,5 kilometra në metra.
 - 250 milimetra në centimetra.
- Distanca nga shtëpia deri në shkollë është 546 metra. Shkruani distancën si numër shumë emëror.
- Shndërroni 3,25 m në:
 - cm,
 - dm,
 - dam
- Për të vlerësuar dhe më pas për të matur saktë gjatësinë e tavolinës në klasën tuaj, ndiqni këto hapa:
 - Vlerësimi i gjatësisë:
 - Shikoni tavolinën dhe përpikuni ta krahasoni me një objekt të njohur gjatësinë e të cilit e dini, për shembull, një fletë letre A4 (që është rreth 30 cm e gjatë) ose gjatësinë e dorës tuaj.
 - Bazuar në këtë krahasim, bëni një vlerësim të përafërt të gjatësisë së tavolinës.
 - Matja me instrumente matëse:
 - Përdorni një instrument matës të përshtatshëm, si metër apo vizore, për të matur saktë gjatësinë e tavolinës.
 - Vendosni instrumentin matës përgjatë njërës anë të tavolinës dhe shënoni gjatësinë e matur.
 - Nëse instrumenti matës është më i shkurtër se gjatësia e tavolinës, bëni më shumë matje dhe mbledhi ato për të fituar gjatësinë totale.
 - Krahasimi i vlerësimit me matjen:
 - Krahasoni vlerësimin tuaj fillestar me gjatësinë e matur saktë.
 - Shënoni dallimin midis vlerësimit dhe matjes dhe mendoni për arsyet e mundshme për këtë dallim.

Ky aktivitet do të ndihmojë të përmirësoni aftësitë e vlerësimit dhe matjes, si dhe të kuptoni rëndësinë e saktësisë në matjen e gjatësive.
- Cili numër i emëruar është më i madh: 5 metra apo 520 centimetra? Për sa?
- Llogaritni perimetrin e shumëkëndëshave në vijim, nëse janë dhënë gjatësitë e brinjëve të tyre:
 - Drejkëndësh me brinjë 4 m dhe 6 m.
 - Trekëndësh me brinjë 5 cm, 8 cm dhe 5 cm.
 - Pesëkëndësh i rregullt me brinjë 3 m.
- Markoja ka një shirit dekorues prej 1500 mm. Shndërroni këtë gjatësi në numër shumë emëror.

8. Matni gjatësinë me anë të vizores dhe shkruani matjen në centimetra dhe milimetra. Çfarë saktësie ka matja që keni fituar? Cilët janë kufijtë e matjes me këtë instrument?

9*. Duke përdorur mikrometër, mat trashësinë e një fijeje të vogël metalike ose telit. Shkruani matjen në mikronë (μm) dhe e shndërroni atë në milimetra. Si mundëson mikrometri matje të sakta të dimensioneve të vogla? A mund të përdoret mikrometri për të matur objekte më të mëdha? Pse po ose pse jo?



Instrumentet për matjen e masës dhe shndërrimi i njësive matëse për masën

Në këtë njësi mësimore do të përqendrohemi në rëndësinë e saktësisë gjatë matjes së masës. Do të rikujtoni se si të lexoni shkallët e instrumenteve analoge dhe digjitale për matjen e masës, si të përdorni njësitë dhe shenjat përkatëse gjatë matjes.

Veçanërisht do t'i kushtoni vëmendje shndërrimit të njësive të masës duke përdorur marrëdhëniet mes njësive të ndryshme. Këto aftësi janë të nevojshme për llogaritje dhe vlerësime të sakta, që mund të jenë të dobishme në fusha të ndryshme si në shkencë, industri, shëndetësi dhe jetën e përditshme.

Shembulli 1

Cilët nga instrumentet matës për masën janë analoge, e cilët digjitale?

1)



2)



3)



4)



Shembulli 2

Markoja dhe Jana janë të angazhuar në një projekt për krijimin e etiketave me përmasa të sakta të masës së materialeve të ndryshme që përdoren në fabrikën e paketimit. Ata duhet të matin masën e sendeve të ndryshme duke përdorur instrumente dhe njësi të ndryshme matëse. Gjatë procesit do të përdoren si peshoret analoge ashtu edhe ato digjitale, e gjithashtu duhet të shndërrojnë njësitë nga njëra në tjetrën për të marrë rezultate të sakta dhe për të regjistruar të dhënat.

- Markoja përdor një peshore analoge që ka shkallë me ndarje çdo 100 gramë. Ai mat masën e një cope alumini dhe lexon vlerën në shkallë. Nëse shigjeta ndodhet pas ndarjes së shtatë 100 gramëshe të ndarjes së tretë 10 gramëshe, sa është masa totale e copës së aluminit?
- Jana përdor një peshore digjitale që tregon drejtpërdrejt masën në kilogramë. Peshorja digjitale tregon 2,850 kg për një paketë të madhe. Sa është kjo në gramë? (Shkruani procesin e shndërrimit të njërive).
- Markoja duhet të regjistrojë të dhënat për masën e paketimit për 5 paketa, secila me masë 3,2 kg. Sa është masa totale e të gjitha paketave nëse e shkruajmë në gramë? Sa është masa totale nëse e shkruajmë në tonelata?
- Jana vlerëson se masa e një pakoje është 3 kilogramë. Duke përdorur peshoren digjitale, matja tregon 3,4 kg. Sa është diferenca ndërmjet vlerës së vlerësuar dhe matjes? Sa përqind e masës së saktë (3,4 kg) përbën masa e vlerësuar (3 kg)?
- Në fabrikën e paketimit duhet që 5,5 tonelata ushqim të pakëtohen në pako me masë 2 kg secila. Sa pako do të fitohen? Sa është masa totale e gjithë ushqimit në gramë?

Zgjidhje:

- Masa e copës së aluminit është: $7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 = 700 + 30 = 730$ g.
- Masa në gramë është: $2,850 \text{ kg} = (2,850 \cdot 1000) \text{ g} = 2850$ g.
- Masa totale në gramë është: $5 \cdot 3,2 \text{ kg} = 16 \text{ kg} = 16000$ g. Masa totale në tonelata është: $16 \text{ kg} = 0,016$ t.
- Diferenca ndërmjet vlerësimit dhe matjes së saktë është: $3,4 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 0,4 \text{ kg}$. Për të llogaritur se sa në përqindje është masa e vlerësuar në raport me masën e saktë, duhet të caktojmë herësin: $3 : 3,4$, që në këtë rast na jep numër dhjetor të pafundëm, kështu që për të shmangur humbjen e saktësisë për shkak të rrumbullakimit të rezultatit, pjesëtimin do ta paraqesim si herës të dy thyesave, përkatësisht $\frac{3}{1} : \frac{34}{10} = \frac{3}{1} \cdot \frac{10}{34} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$. Në përqindje kemi $\frac{15}{17} \cdot 100 = \frac{1500}{17} = 88\frac{4}{17}\%$. Përqindjet shkruani si numër dhjetor me dy dhjetore. Kjo do të thotë se vlerësimi i Janës është $88\frac{4}{17}\%$ e masës saktë të matur.
- Numri i pakove është: $5,5 \text{ t} = 5500 \text{ kg}$, $5500 \text{ kg} : 2 \text{ kg} = 2750$ pako.
Masa totale e ushqimit në gramë është $5,5 \text{ t} = 5500 \text{ kg} = (5500 \cdot 1000) \text{ g} = 5500000$ g.

Detyra 1

Ana duhet të matë masën e një pakete me grurë duke përdorur një peshore analoge. Në shkallën e peshores, shigjeta tregon 4 ndarje nga 1 kilogram dhe akoma 5 ndarje më të vogla, ku çdo ndarje është 100 gramë. Sa është masa totale e paketës në kilogramë dhe në gramë?

Detyra 2

Zoki ka matur masën e 3 pakove me çokolatë. Pakoja e parë ka masë 250 g, e dyta 0.5 kg dhe e treta 300 g. Sa është masa totale e tri pakove në kilogramë?

Detyra 3

Në një raft në farmaci ka kuti me paketime të ndryshme ilaçesh. Një kuti përmban 14 tableta nga 400 mg secila, një tjetër kuti ka 10 tableta nga 325 mg secila dhe një kuti e tretë ka 20 qese nga 15 g secila. Llogaritni masën totale të ilaçeve nëse në atë raft ka nga 10 kuti nga secili lloj ilaçi. Shprehni masën totale në gramë, në dekagramë dhe në hektogramë.

Shembulli 3

Një kuti me çokolata ka masën 2,5 kg. Në depo ka 48 kuti të tilla.

- Sa është masa totale në kilogramë e të gjitha kutive së bashku?
- Shndërroni masën totale të kutive në gramë.
- Një kamion mund të mbajë maksimum 1,2 tonelata ngarkesë. A mund të transportohet kjo ngarkesë me një kamion? Nëse jo, sa tonelata do të duhet të transportohen me një kamion të dytë?

Zgjidhje:

- Masa e të gjitha kutive llogaritet duke shumëzuar numrin e kutive me masën e një kutie:
 $48 \cdot 2,5 \text{ kg} = 120 \text{ kg}.$
- Masën totale prej 120 kg e shndërrojmë në gramë: $120 \text{ kg} = (120 \cdot 1000) \text{ g} = 120000 \text{ g}.$
- Për t'u përgjigjur në këtë pyetje, së pari duhet të shndërrojmë masën që mund t'a bart kamioni nga tonelata në kilogramë: $1,2 \text{ t} = (1,2 \cdot 1000) \text{ kg} = 1200 \text{ kg}$
Pastaj krahasojmë: $120 \text{ kg} < 1200 \text{ kg}.$ Po, e gjithë ngarkesa mund të transportohet me një kamion, sepse masa e kutive është më e vogël se sa kapaciteti i kamionit.

Detyra 4

Në një fabrikë mielli paketohen qese me miell, secila me masë 4,75 kilogramë.

- Fabrika prodhon 650 qese në një ditë. Sa është masa totale e miellit në kilogramë?
- Në një depo mund të ruhen maksimalisht 3,5 tonelata miell. A mund të ruhen të gjitha qeset e prodhuara gjatë një dite në një depo të vetme?
- Shndërroni masën e përgjithshme të miellit në numër shumëemror.

Nëse do të punonit në një dyqan ose depo, si do të vendosnit se cilën njësi matëse (gramë, kilogramë apo tonelata) do ta përdornit për produkte të ndryshme? Shpjegoni pse është e rëndësishme të zgjidhen njësitë e duhura të masës në jetën e përditshme?.

Përgjigjuni pyetjeve në fletoren tuaj.

1. A mund të llogaris masën totale me njësi të ndryshme matëse (gramë, kilogramë, tonelata)?
Po / Pjesërisht / Jo
2. A kuptoj rëndësinë e secilës njësi matëse dhe kur përdoret?
Po / Pjesërisht / Jo
3. A arrita të lidh njohuritë për njësitë e masës me shembuj nga jeta reale?
Po / Pjesërisht / Jo
4. Çfarë mund të bëj më mirë herën tjetër për të zgjidhur më lehtë këto lloj ushtrimesh?

Punë e pavarur

1. Një pako miell ka masë 3,25 kg. Sa është masa në hektogramë (hg), dekagramë (dag) dhe miligramë (mg)?
2. Nëse një kuti me çokollata ka masë 1,2 hg, sa kuti të tilla prej 6 kg do të nevojiten për të shpërndarë çokollatat e kutisë?
3. Një kuti plastike me mjaltë ka masë 5,6 kg dhe një tjetër 4,75 kg. Sa është masa totale në hg? Sa është diferenca në masë midis dy kutive në dag?
4. Cila masë është më e madhe: 3,5 hg apo 3500 mg? Sa herë është njëra masë më e madhe se tjetra?
5. Një paketë transporti përmban 50 paketime gjalpi, secila me masë 250 g. Sa është masa totale e paketës në kilogramë dhe hektogramë?
6. Një kavanoz i madh reçeli ka masë 4,125 kg. Shndërroni masën në dag, në g dhe në hg.
7. Vlerësoni sa është masa e një çante bosh dhe shënoni përgjigjen në hg. Kontrolloni saktësinë me matje dhe shprehni masën në dag.
8. Një copë druri që përdoret për prodhimin e mobiljeve ka masë 15 hg. Gjatë përpunimit duhet të ndahet në 3 pjesë të barabarta. Sa do të jetë masa e secilës pjesë në kg?
9. Në peshore shfaqet masa 0,875 kg. Shkruani atë si numër shumëëmëror.
10. Një mjet transporti mund të mbajë deri në 2 t. Sa pako me masë 125 kilogramë mund të transportojë gjatë një transporti?

Matja dhe njësitë matëse për vëllimin

Matja e vëllimit është aftësi kyçe në jetën e përditshme dhe në fusha të ndryshme profesionale. Duke filluar nga matja e lëngjeve në amvisëri, deri te proceset komplekse inxhinierike dhe shkencore, saktësia dhe kuptimi i njësive të matjes së vëllimit luajnë një rol të rëndësishëm. Me këtë njësi mësimore do të rikujtoni si të lexoni shkallët e instrumenteve analoge dhe digjitale për matjen e vëllimit, siç janë enët e graduara cilindrike, matësit digjital dhe instrumente të tjera dhe do të përqendrohemi në shndërrimin e njësive të vëllimit duke përdorur lidhjet mes tyre. Këto aftësi jo vetëm që do t'u ndihmojnë në vlerësimin dhe matjen, por edhe do t'u përgatisin për situata reale ku kërkohet saktësi dhe efikasitet.

Shembulli 1

Vrojtoni instrumentet matës për vëllimin. Cili prej tyre është më i saktë?



Shembulli 2

Një cisternë mund të mbajë saktësisht 8 hektolitra (hl) lëng. Për transport, lëngu derdhet në enë më të vogla me kapacitet prej 25 litra (l) secila. Sa enë me kapacitet 25 l janë të nevojshme për të zbrazur gjithë cisternën?

Zgjidhje:

Shndërrimi i hektolitrave në litra: $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$, $8 \text{ hl} = (8 \cdot 100) \text{ l} = 800 \text{ l}$

Llogaritja e numrit të enëve: $800 : 25 = 32$ enë.

Pra, nevojiten 32 enë për të zbrazur cisternën.

Detyra 1

Një fabrikë prodhon dhe paketon produkte të ndryshme, kurse ti je pjesë e ekipit të ngarkuar me matjen dhe llogaritjen e gjatësisë, masës dhe vëllimit për të siguruar saktësinë në prodhim dhe shpërndarjen.

- 1) Një paket produktesh ruhet në një kuti plastike me dimensionet e mëposhtme: gjatësia 0,25 dm, gjerësia 3,2 m dhe lartësia 0,1 hm.

- a) Shndërroni të gjitha dimensionet në metra (m) dhe centimetra (cm).
 - b) Llogaritni perimetrin e bazës së kutisë.
 - c) Vlerësoni nëse kutia mund të vendoset në një magazinë me lartësi 1,5 dam.
- 2) Një produkt ka masë prej 450 g.
- a) Shndërroni masën e produktit në dag, hg dhe kg.
 - b) Nëse në enën plastike vendosen 250 produkte, llogaritni masën totale të të gjitha produkteve dhe krahasoni me kapacitetin e lejuar të kutisë prej 120 kg.
- 3) Në enën plastike mund të vendoset një lëng me vëllim prej 3,24 hl. Sa shishe me vëllim prej 800 ml do të nevojiten për të mbushur enën plastike?
- 4) Shkruani të gjitha matjet e fituara në pikat 1), 2) dhe 3) si numra me njësi të njëjta dhe të ndryshme. Verifikoni nëse vlerësimet e tua janë të sakta përmes matjeve dhe shndërrimeve. Përdorni numra dhjetorë me tri shifra dhjetore gjatë shndërrimeve

Shembulli 3

Elena dëshiron të bëjë lëng shtëpiak dhe ta ruajë në shishe dhe shtamba. Ajo ka përgatitur 15 litra lëng. Në shtëpi ka 5 shishe me vëllim prej 750 ml secila dhe 2 shtamba me kapacitet prej 5 litra secila.

- a) A do të mundet Elena të ruajë gjithë lëngun në shishe dhe shtambat? Nëse jo, sa lëng do të mbetet?
- b) Një shishe ka masën 250 g kur është bosh. Lëngu me vëllim 1 litër ka masë 1 kg. Nëse shishja mbushet me 1 litër lëng, sa është masa totale e shishes kur është plot?
- c) Sa është masa totale e lëngut dhe shtambave të zbrazëta nëse secila shtambë ka masë 1.5 kg?

Hulumtoni për lidhjen midis masës dhe vëllimit ose sa është masa e lëngut që ka vëllim 1 litër.

Ky raport mund të shprehet si $\frac{\text{masa (kg)}}{\text{vëllimi (l)}}$. Mund ta pyetni edhe mësuesin tuaj të fizikës se çfarë do të thotë termi dendësi dhe me cilat njësi matëse ajo shprehet.

Zgjidhje:

- a) Vëllimi i 5 shisheve: $5 \cdot 750 \text{ ml} = 3750 \text{ ml}$ ose $3,75 \text{ l}$
 Vëllimi i 2 shtambave: $2 \cdot 5 \text{ l} = 10 \text{ l}$
 Vëllimi total: $3,75 \text{ l} + 10 \text{ l} = 13,75 \text{ l}$
 Lëngu i mbetur: $15 \text{ l} - 13,75 \text{ l} = 1,25 \text{ l}$
 Pra, nuk mund të ruhet i gjithë lëngu, do të mbeten 1,25 litra.
- b) Masa e një shisheje të mbushur:
 Masa e shishes bosh = 250 g
 Masa e lëngut në shishe (1 litër lëng ka masë 1 kg) = 1000 g
 Masa totale = $250 \text{ g} + 1000 \text{ g} = 1250 \text{ g} = 1,25 \text{ kg}$
- c) Masa totale e lëngut dhe enëve:
 Masa e lëngut = kapaciteti (litra) $\cdot$ masa e 1 litri lëng = $15 \cdot 1 = 15 \text{ kg}$
 Masa e 5 shisheve: $5 \cdot 0,25 \text{ kg} = 1,25 \text{ kg}$
 Masa e 2 shtambave: $2 \cdot 1,5 \text{ kg} = 3 \text{ kg}$
 Masa totale: $15 \text{ kg} + 1,25 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 19,25 \text{ kg}$

Detyra 2

Ivani po punon në një projekt për mirëmbajtjen e një sistemi hidroponik – një metodë e rritjes së bimëve pa përdorimin e dheut. Sistemi ka nevojë për rezervuarë me ujë dhe tretësira ushqyese me një vëllim të caktuar. Ivani ka dy rezervuarë: njëri me vëllim prej 18,5 litra dhe tjetri prej 12,75 litra. Ai duhet të mbushë gjithsej 40 litra lëng në të dy rezervuarët dhe në shishe me kapacitet 1,25 litra.

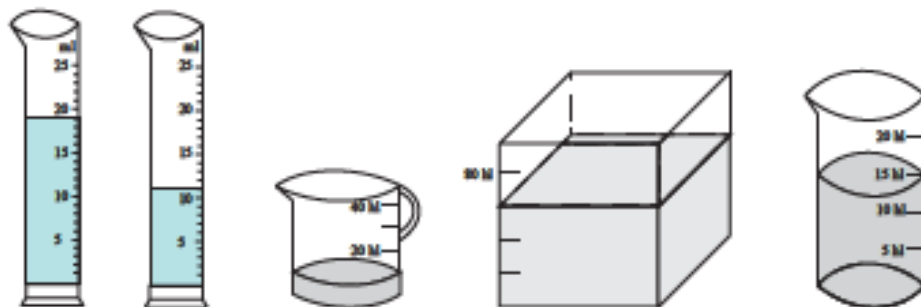
- Sa shishe me vëllim prej 1,25 litra do t'i duhen për të ruajtur tepricën e lëngut që nuk do të futet në rezervuarë?
- Nëse Ivani dëshiron ta mbushë rezervuarin prej 12,75 litrash deri në 75% të vëllimit të tij të plotë, sa litra do t'i nevojiten?
- Nëse Ivani përdor raportin 3:2 për ujë dhe tretësirë ushqyese, sa litra nga secila do të shtojë për ta mbushur rezervuarin prej 18,5 litrash?

Detyra 3

Një litër naftë ka masë prej 0,8 kg. Në një rezervuar futen 400 kg naftë. Cili është vëllimi i rezervuarit?

Detyra 4

Shënoni vëllimin e treguar në secilën prej figurave:



Detyra 5

Jovana po përgatit supë për familjen. Në recetë shkruan se për supën i duhen 2,5 litra ujë. Ajo ka një instrument dixhital matës me shkallë në mililitra dhe një kupë me vëllim maksimal prej 1,2 litra.

- Llogarit sa herë do të duhet ta mbushë kupën për të arritur sasinë e nevojshme të ujit.
- Nëse Jovana e mbush kupën deri në vëllimin maksimal vetëm dy herë, sa ujë do t'i mungojë?
- Duke përdorur instrumentin digjital, Jovana vëren se në tenxhere ku po përgatit supën, tashmë ka 750 ml ujë. Sa herë do të fut ujë me kupë që të ketë mjaftueshëm ujë për supën?

Imagjinoni se jeni projektues i enëve të reja praktike për përdorim të përditshëm, siç janë shishet, kupat ose enët për gatim. Si do t'i përdornit njohuritë e juaja për matjen dhe llogaritjen e vëllimit për t'i bërë këto enë sa më precize, funksionale dhe efikase për përdoruesit?

A do të zgjidhnit instrumente matës analogë apo digjitalë për të kontrolluar vëllimin e tyre?

Pse?

Përgjigjuni pyetjeve në fletoren tuaj. Ndani me shokun/shoqen apo shokët/shoqet e klasës.

1. Sa i/e sigurt jam në leximin e shkallëve në instrumentet matëse analoge dhe digjitale për matjen e vëllimit?
 - a) Shumë i/e sigurt
 - b) Pjesërisht i/e sigurt
 - c) Duhet të ushtrohem më shumë
2. A mund t'i kthej saktë njësitë matëse për vëllim (p.sh., litra në mililitra, centimetra kub në litra)?
 - a) Gjithmonë saktë
 - b) Nganjëherë bëj gabime
 - c) Duhet ta përsëris këtë
3. Kur përdor instrument analog ose digjital, a mund të vlerësoj nëse rezultati është i logjikshëm?
 - a) Po, gjithmonë jam i/e sigurt
 - b) Nganjëherë jam i/e pasigurt
 - c) Jo, këtë duhet ta përmirësoj
4. Çfarë mund të bëj për të përmirësuar aftësitë e mia në matje dhe llogaritje të vëllimit? (Shkruaj një hap që do të ndërmerresh.)

Punë e pavarur

1. Një rezervuar përmban 3,25 kl ujë. Shndërroni vëllimin në hl, dal dhe l.
2. Një rezervuar me kapacitet prej 1,8 kl është i mbushur deri më 75% të kapacitetit. Sa është sasia aktuale e ujit në dal dhe l?
3. Dy pishina kanë vëllim prej 2,35 kl dhe 1,75 kl, përkatësisht.
 - a) Sa është vëllimi total në hl?
 - b) Sa është dallimi në vëllim i shprehur në dal?
4. Cili vëllim është më i madh: 4,5 hl apo 450 dal? Sa herë është njëri vëllim më i madh se tjetri?
5. Një cisternë mban 12 dal naftë. Sa litra mban një kanistër, nëse nga e gjithë cisterna mund të mbushen 24 kanistra të njëjtë?
6. Vlerësoni sa vëllim ka një kovë me ujë dhe shkruani përgjigjen në dal. Kontrolloni saktësinë me matje dhe shprehni vëllimin në hektolitra (hl).
7. Në shkallë digjitale është treguar vëllimi 0,435 kl.
 - a) Shndërroni atë në hl, dal dhe l.
 - b) Shkruani si një numër shumë emëror.
8. Një akvarium përmban 2,7 hl ujë. Sa litra ujë përmban akvariumi?
9. Një proces prodhimi përdor 15 dal lëng çdo ditë. Sa hl lëng do të konsumohen për 30 ditë?
10. Një automjet transportues mund të bartë 6 hl lëng për një udhëtim. Sa kl lëng mund të transportojë për 5 udhëtime?
11. Një fuçi me kapacitet prej 2,5 dal është mbushur deri në 80%. Sa është sasia e lëngut në fuçi në litra?
12. Një rezervuar me kapacitet prej 1,2 kl po zbrazet në enë me nga 12 l. Sa enë do të nevojiten që të zbrazet i gjithë rezervuari?
13. Një depo ka 8 rezervuarë, secili me kapacitet prej 3,75 hl. Sa është vëllimi total i të gjithë rezervuarëve në dal?
14. Sa është dallimi në vëllim midis 5 kl dhe 450 dal? Shprehni ndryshimin në hl.
15. Një enë magazinimi ka vëllim prej 0,625 hl.
 - a) Sa dal dhe l është ky vëllim?
 - b) Bëni një vlerësim nëse është e mjaftueshme për të magazinuar 700 l.

Koha. Sistemi 12-orësh dhe 24-orësh

Me këtë njësi mësimore do të rikujtoni njohuritë që keni fituar në klasën e mëparshme për njësitë matëse të kohës, si: sekonda, minuta, orë, ditë, javë, muaj, vit, dekadë dhe shekull. Gjatë këtij mësimi do të mësoni t'i përdorni lidhjet midis njësive të kohës për t'i shndërruar nga njëra në tjetrën, si dhe të përdorni sistemin 12-orësh dhe 24-orësh gjatë zgjidhjes së problemeve nga konteksti i përditshëm. Këto dy sisteme kohore janë më së shumti të përdorura në kontekste të ndryshme: sistemi 12-orësh përdoret në jetën e përditshme, ndërsa sistemi 24-orësh përdoret shpesh në dokumente zyrtare, transport dhe sisteme kompjuterike.

Shembulli 1

Familja Jovanoviq planifikon një udhëtim njëditor. Ata duan të vizitojnë kopshtin zoologjik dhe muzeun dhe më pas të drekojnë në një restorant. Në tabelë është dhënë orari dhe kohëzgjatja e aktiviteteve të tyre:

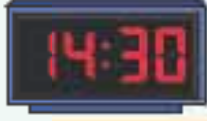
Aktiviteti	Koha e fillimit	Koha e mbarimit
Vizitë në kopshtin zoologjik		
Vizitë në muze		
Drekë në restorant		

- Llogaritni kohën totale që familja Jovanoviq e kalon në aktivitetet e mëposhtme:
 - Vizita në kopshtin zoologjik
 - Vizita në muze
 - Dreka në restorant
 Shprehni rezultatet në minuta.
- Ana, anëtarja më e vogël e familjes, ka shkruar kohët nga tabela në regjistrin digjital. Si do të regjistroheshin këto kohë në regjistrin analog? Përshkruani shkurtimisht ndryshimet midis leximit të orës digjitale dhe asaj analoge.
- Familja ka vendosur të vazhdojë aktivitetet edhe për 2 orë e 45 minuta pas drekës. Sa do të jetë ora atëherë?

Zgjidhje:

- a) Për vizitën në kopshtin zoologjik nga ora 10:30 deri në 12:00 ka 1 orë e 30 minuta ose 90 minuta.
Për vizitën në muze, familja Jovanoviq ka kaluar kohë nga ora 12:30 deri në 14:00, që është 1 orë e 30 minuta ose 90 minuta.
Për drekën në restorant, kanë ndarë kohë nga ora 14:30 deri në 15:30, që është 1 orë ose 60 minuta.

b)

Aktiviteti	Koha e fillimit	Koha e mbarimit
Vizitë në kopshtin zoologjik		
Vizitë në muze		
Drekë në restorant		

- c) Aktiviteti i fundit i familjes Jovanoviq është deri në ora 15 e 30 minuta. Familja ka vazhduar edhe për 2 orë e 45 minuta. $(15 + 2) \text{ h} + (30 + 45) \text{ min} = 17 \text{ h} + 75 \text{ min} = 18 \text{ h } 15 \text{ min}$.
Atëherë do të jetë ora 18 e 15 minuta.



Sfidë plotësuese: Sa dekada ka në 200 vite?

Detyra 1

Nxënësit e një klubi sportiv po përgatiten për një garë sportive. Trajneri i tyre ka përgatitur një orar për stërvitje dhe aktivitete për një ditë. Në tabelë është paraqitur orari:

Aktiviteti	Koha e fillimit	Koha e mbarimit
Parapërgatitje e mëngjesit	07:45	8:30
Trajnimi në teren	9:00	10:15
Pushim	10:15	10:45
Trajnim i pasditës	14:00	15:30

- Çfarë lloj ore është përdorur për të shfaqur kohën në tabelë?
- Llogarit kohëzgjatjen e çdo aktiviteti të shprehur në:
 - Minuta
 - Orë (në formë dhjetore, p.sh., 1,5 orë)
- Sa kohë kalojnë nxënësit në stërvitje aktive gjatë ditës? Jepni përgjigjen në orë dhe minuta.
- Gjeni kohën totale të të gjitha aktiviteteve (përfshirë edhe pushimin) të shprehur në orë dhe minuta.
- Nëse stërvitja në fushë zgjat 20% më shumë se koha fillestare e planifikuar, sa do të jetë koha e re përfundimtare e këtij aktiviteti?

Sfidë plotësuese:

Sa vite ka në 2,3 shekuj?

Detyra 2

Markoja ka bërë një plan për detyrat e tij gjatë një jave. Ai ka llogaritur me kujdes kohën që i kushton aktiviteteve të ndryshme çdo ditë. Ja të dhënat për aktivitetet e tij ditore:

Aktiviteti	Kohëzgjatja (në min.)
Mësim	120
Stërvitje sportive	90
Lojë me shokë	45
Lexim i librave	30
Shikim i televizionit	60

Markoja kryen të njëjtat aktivitete çdo ditë nga e hëna deri të premten, ndërsa gjatë fundjavës nuk i kryen këto aktivitete.

- Llogaritni sa kohë Marko shpenzon për të mësuar, për stërvitje sportive, lojë me shokë, lexim librash dhe shikim televizori për pesë ditë pune bashkë. Shprehni kohën në:
 - Minuta
 - Orë
- Llogaritni sa kohë kalon Markoja duke mësuar për: 1) 1 muaj (4 javë) 2) 1 vit (përdorni kalendarin e vitit aktual)
- Shndërroni kohën totale që Markoja shpenzon për stërvitje sportive për pesë ditë pune nga minuta në orë.
- Nëse Markoja vendos të shtojë edhe 15 minuta për lexim librash çdo ditë, sa kohë (në orë dhe minuta) do të shpenzojë në javë për këtë aktivitet?

Sfidë plotësuese:

Markoja planifikon të mësojë 40% të kohës së tij gjatë fundjavës për të përplotësuar detyrimet e tij. Nëse fundjava zgjat 48 orë, sa kohë (në orë dhe minuta) do të kalojë duke mësuar?

Detyra 3

- Duhet të bëni një eksperiment që zgjat 2 orë e 45 minuta. Sa sekonda zgjat eksperimenti?
- Nëse shkoni në pushime dhe pushimi zgjat 5 ditë e 6 orë, sa orë është koha e pushimit?
- Nëse keni folur në telefon në total 120 minuta gjatë javës, sa orë është kjo?

Shembulli 2

Orari i aktiviteteve shkollore

Tomislavi dhe Ana janë nxënës në të njëjtën shkollë. Orari i tyre shkollor është si më poshtë:

- Ora e matematikës fillon në ora 8 e 30 minuta dhe zgjat 45 minuta.
 - Pason pushim prej 15 minutash.
 - Më pas është ora e fizikës nga ora 9 e 30 minuta deri ora 10 e 15 minuta.
 - Dreka fillon në orën 12:00 dhe zgjat 45 minuta.
 - Ora e fundit fillon në orën 15:00 dhe zgjat 1 orë.
- Shkruani në sistemin 12-orësh kohën kur fillon ora e matematikës dhe kohën kur fillon ora e fundit.
 - Shkruani kohën për të gjitha aktivitetet në sistemin 24-orësh (fillimi i orës së matematikës, pushimi, ora e fizikës, dreka, ora e fundit).
 - Nëse Tomislavi dhe Ana duhet të kthehen në shtëpi pas orës së fundit dhe autobusi nis në orën 16:00, në cilin sistem është më e qartë të shfaqet kjo kohë dhe pse?

Zgjidhje:

- Ora e matematikës fillon në 8:30 të mëngjesit.

Ora e fundit fillon në orën 3 pasdite.

Në sistemin 12-orësh, koha ndahet në dy periudha:

- nga mesnata deri në mesditë (00:00 deri 11:59) dhe
- nga mesdita deri në mesnatë (12:00 deri 11:59).

Kohën e shkruajmë me dy pika ndërmjet orëve dhe minutave dhe përdorim: për periudhën nga mesnata deri në mesditë, pranë kohës shkruajmë ose themi “në mëngjes” ose “paradite”, ndërsa për periudhën nga mesdita deri në mesnatë, pranë orës shkruajmë “pasdite” ose “në mbrëmje”.

Në sistemin 24-orësh, koha është në një periudhë, nga 00:00 deri në 23:59. Koha shkruhet me katër shifra, ku orët dhe minutat ndahen me dy pika (:), pra shkruajmë

00:00, 01:00, 02:00, ... 11:00, 12:00, 13:00, ... 17:00, 18:00, ... 22:00, 23:00.

Çfarë sisteme për matjen e kohës përdoren në shtete të ndryshme?

b) Matematika nga ora 08:30 deri në 09:15, pushim nga 09:15 deri në 09:30, fizika nga 09:30 deri në 10:15, dreka nga 12:00 deri në 12:45, ora e fundit nga 15:00 deri në 16:00.

c) Autobusi nisat në ora 16:00. Në sistemin 12-orësh kjo kohë është 4.00 pasdite. Në sistemin 24-orësh kjo është 16:00.

Mund të përfundojmë se:

- Orët analoge tregojnë kohën në sistemin 12-orësh.
- Orët digjitale mund të tregojnë kohën në: sistemin 12-orësh, ku orët dhe minutat ndahen me dy pika (:) dhe përdoren shkurtesat AM (ante meridiem, për periudhën nga 0:00 deri në 11:59) dhe PM (post meridiem, për periudhën nga 12:00 deri në 23:59); në sistemin 24-orësh, ku koha shfaqet me katër shifra, ku orët dhe minutat ndahen me dy pika (:) .



Detyra 4

Shkruani në fletore këto kohë në sistemin 12- orësh dhe 24-orësh:

- a) 5:30 në mëngjes, b) 11:20 paradite
c) ora 4 e 35 minuta pasdite, ç) ora 9 e 50 minuta në mbrëmje

Detyra 5

Shkruani në fletore kohët në sistemin 12-orësh dhe 24-orësh:

- a) 13:45, b) 00:30, c) 17:00, ç) 23:15

Shembulli 3

Markoja planifikon një udhëtim nga Shkupi në Ohër. Ai duhet të dijë se kur nis autobusi dhe kur do të arrijë në Ohër.

Autobusi nisat nga Shkupi në 11:30.

Autobusi arrin në Ohër në 2:15 pasdite.

- a) Në sistemin 12-orësh, cila do të jetë koha e nisjes së autobusit?
b) Në sistemin 24-orësh, kur do të arrijë autobusi në Ohër?
c) Sa kohë do të zgjas udhëtimi?

Zgjidhje:

- Në sistemin 12-orësh koha kur nis autobusi është 11:30 paradite.
- Në sistemin 24-orësh koha kur autobusi arrin në Ohër është 14:15.
- Udhëtimi fillon në 11:30 paradite, që do të thotë 30 minuta në gjysmën e parë të ditës dhe përfundon në 2:15 pasdite, që do të thotë edhe 2 orë e 15 minuta në gjysmën e dytë të ditës. Në total, udhëtimi zgjat: $2\text{ h } 15\text{ min} + 30\text{ min} = 2\text{ h } 45\text{ min}$. Si është më lehtë të llogaritni, në sistemin 12-orësh apo në atë 24-orësh?

Detyra 6

Ekskursioni shkollor do të mbahet më 12 maj. Shikoni orarin për ditën:

- Autobusi duhet të niset nga shkolla në 8:00 të mëngjesit.
 - Vizita shkencore do të fillojë në 9:30 të mëngjesit dhe do të përfundojë në 1:45 pasdite.
 - Dreka do të fillojë në 14:00 dhe do të zgjasë 45 minuta.
 - Në orën 3:00 pasdite fillon aktiviteti i fundit dhe do të zgjasë deri në 17:00.
 - Autobusi niset mbrapsht në 6:15 pasdite.
- Shndërroni kohën e nisjes së autobusit nga sistemi 12-orësh në sistemin 24-orësh.
 - Sa zgjat vizita shkencore?
 - Llogaritni sa kohë të lirë do të keni pas drekës deri në fillimin e aktivitetit të fundit?

Mendoni për një situatë kur punoni në një ekip dhe të gjithë përdorin sisteme të ndryshme kohore. Si do ta koordinoni kohën që të mos ketë keqkuptime? Shkruani një plan se si do t'i sinkronizoni sistemet kohore në mjedisin e punës.

Shkruani një ese të shkurtër për atë se si sistemet e ndryshme të matjes së kohës mund të jenë të dobishme në jetën e përditshme.

Punë e pavarur

1. Familja Mediçi planifikojnë një udhëtim njëditor gjatë fundjavës. Ata planifikojnë vizitat në lokacionet më poshtë:

Lokacioni	Distanca (km)	Koha e kaluar për udhëtim deri te lokacioni (min)	Koha e qëndrimit (min)
Etno fshat	50	60	90
Park nacional	30	40	120
Restorant lokal	20	30	60

Ata nga shtëpia nisen saktësisht ora 9:00 në mëngjes.

- Llogaritni sa kohë do të kalojë familja në udhëtim deri te të gjitha lokacionet. Shprehni kohën në orë dhe minuta.
- Sa kohë totale do të kalojnë në udhëtim dhe qëndrim për secilin lokacion?
- Nëse familja vendos të zvogëlojë kohën e qëndrimit në parkun kombëtar për 30 minuta, sa kohë do t'u mbetet për aktivitete shtesë?
- Shprehni kohën e udhëtimit ndërmjet të gjitha lokacioneve (përfshirë edhe kthimin në shtëpi) në sekonda.
- Sa kilometra kanë përshkuar atë ditë?
- Shkruani pyetje të tjera që mund t'u përgjigjeni duke përdorur tabelën.

Sfidë shtesë:

Familja Mediçi planifikon të vizitojë përsëri fshatin etnik pas një viti. Nëse viti tjetër është vit i brishtë (vit kërcyes), sa ditë do të kalojnë nga dita e këtij udhëtimi deri në udhëtimin e tyre të ardhshëm?

2. Ana organizon festë për ditëlindje dhe dëshiron që gjithçka të jetë gati në kohë. Ajo ka bërë një orar për përgatitjet dhe për aktivitetet gjatë festës. Në tabelën më poshtë janë dhënë planet e saj:

Aktiviteti	Koha e fillimit	Kohëzgjatja
Dekorimi i hapësirës	14:30	1 orë e 15 minuta
Përgatitja e ushqimit	15:45	2 orë e 20 minuta
Festa e ditëlindjes	18:15	3 orë
Pastrim pas festës	21:30	1 orë e 45 minuta

- 
- a) Llogaritni kohën përfundimtare të secilit aktivitet. Shkruani rezultatet në format digjital 12-orësh (orë: minuta).
 - b) Sa kohë do të kalojë Ana për përgatitje para fillimit të festës? Shprehni kohën në minuta.
 - c) Nëse Ana dëshiron të fillojë përgatitjet saktësisht 5 orë para festës, në sa ora duhet të fillojë?
 - ç) Shkruani kohët e tabelës në orën analoge. Përshtuani si duken shigjeta e orës dhe e minutave për fillimin dhe përfundimin e secilit aktivitet.
 - d) Sa kohë totale (në orë dhe minuta) nevojiten për të gjitha aktivitetet së bashku?
 - dh) Ana ka vendosur të shkurtojë 30 minuta nga përgatitja e ushqimit. Sa kohë tani do të ketë për pushim para se të fillojë festa?

Sfidë shtesë:

Nëse Ana planifikon të festojë ditëlindjen e saj edhe vitin tjetër, llogarit sa javë ka deri te ditëlindja e saj e ardhshme.

Lexoni me kujdes dhe zgjidhni secilën detyrë. Shkruani hapat që do t'i ndiqni për të marrë përgjigjen e saktë.

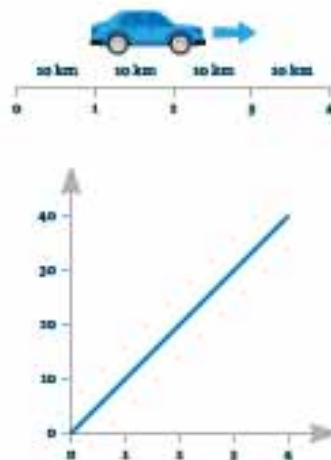
3. Shndërroni 150 minuta në orë dhe minuta.
4. Shndërroni 48 orë në ditë.
5. Sa javë ka në 15 ditë?
6. Shndërroni 6 javë në muaj (supozoni se një muaj ka 4 javë).
7. Sa vite ka në 3 dekada?
8. Shndërroni 500 sekonda në minuta dhe sekonda.
9. Sa javë ka në 10080 minuta?
10. Sa sekonda ka në 3 orë?
11. Shndërroni 730 ditë në vite.
12. Cili ka vlerë më të madhe: 3 orë dhe 30 minuta apo 210 minuta? Shpjegoni.
13. Vera planifikon të punojë në projekt nga ora 11.00 paradite deri në 5.30 pasdite. Shndërroni kohën në sistem 24-orësh dhe llogaritni sa kohë do të kalojë në projekt.

14. Andi dhe familja e tij udhëtojnë nga Stambolli, Turqia, për në Nju Jork, SHBA. Fluturimi nis nga Stambolli në orën 10.00 paradite sipas kohës lokale. Fluturimi zgjat 10 orë dhe arrin në Nju Jork në orën 15:00 sipas kohës lokale.
- Shkruani kohën kur do të mbërrijnë në Nju Jork, në sistemin 12 - orësh?
 - Llogaritni diferencën në zonat kohore midis Stambollit dhe Nju Jorkut.
15. Autobusi i shkollës suaj arrin në stacion në orën 10 paradite. Nëse autobusi kthehet në të njëjtin stacion pas 3 orë e 20 minuta, atëherë sa është ora kur të mbërrij aty? Shkruani kohën e arritjes në formatin 12-orësh dhe 24-orësh.
- 16.* Jana merr pjesë në një takim ndërkombëtar që mbahet midis tre qyteteve: Tokio (Japoni), Londër (Mbretëri e Bashkuar) dhe Sidnej (Australi). Në takim marrin pjesë përfaqësues nga këto tre qytete. Takimi fillon në orën 09:00 në Tokio më 1 mars. Hulumtoni në internet për zonat kohore (Tokio, Londër dhe Sidnej).
- Shndërroni kohën e fillimit të takimit në kohët për Londër dhe Sidnej.
 - Sa është diferenca në kohë midis Tokios dhe Sidnejit?

Llogaritja e intervaleve kohore dhe puna me grafikë

Në këtë njësi mësimore do të përkujtoni se si të llogaritni intervalet kohore duke përdorur grafikë dhe orare të ndryshme, nga shembujt e përditshëm deri te ata më të ndërlikuar. Intervalet kohore janë thelbësore për organizimin e kohës, sidomos kur punoni me orare për evenimente, plane, transport dhe aktivitete të tjera.

Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si të përdorni grafikët kohor dhe si të llogaritni intervalet kohore, që është pjesë e rëndësishme e planifikimit dhe organizimit të jetës së përditshme.



Shembulli 1

Një grup nxënësish po planifikon një ekskursion shkollor që do të zgjasë 4 ditë. Çdo ditë ka një orar të ndryshëm aktiviteteve, siç është dhënë në tabelë:

Aktivitetet sipas ditëve:

Ditët	Aktivitete dhe koha për pushim		
	Fillimi i aktiviteteve	Pushimi	Mbarimi i aktiviteteve
E parë	09:00	12:00 - 12:30	16:30
E dytë	08:30	13:00 - 13:30	17:00
E tretë	09:00	12:00 - 12:30	15:30
E katërt	08:00	11:00 - 11:30	14:00

- Sa kohë zgjasin, gjithsej, aktivitetet dhe pushimet, përkatësisht, gjatë ekskursionit? Llogaritni kohën në orë dhe minuta.
- Përdor orarin për 24 orë dhe llogaritni sa orë aktivitete (pa llogaritur kohën për pushim) ka në secilën ditë.
- Nëse orari i ekskursionit fillon më 15 maj, kur do të përfundojë ekskursioni sipas kalendarit?

Zgjidhje:

- Dita e parë: 7 orë e 30 minuta. Dita e dytë: 8 orë e 30 minuta. Dita e tretë: 6 orë e 30 minuta. Dita e katërt: 6 orë. Totali: 27 orë e 90 minuta = 28 orë e 30 minuta
- Dita e parë: 7 orë. Dita e dytë: 8 orë. Dita e tretë: 6 orë. Dita e katërt: 5,5 orë.
- Fillimi më 15 maj, përfundimi më 18 maj.

Detyra 1

Je i ngarkuar të organizosh një ngjarje gjatë fundjavës. Orari ditor i ngjarjes është si më poshtë:

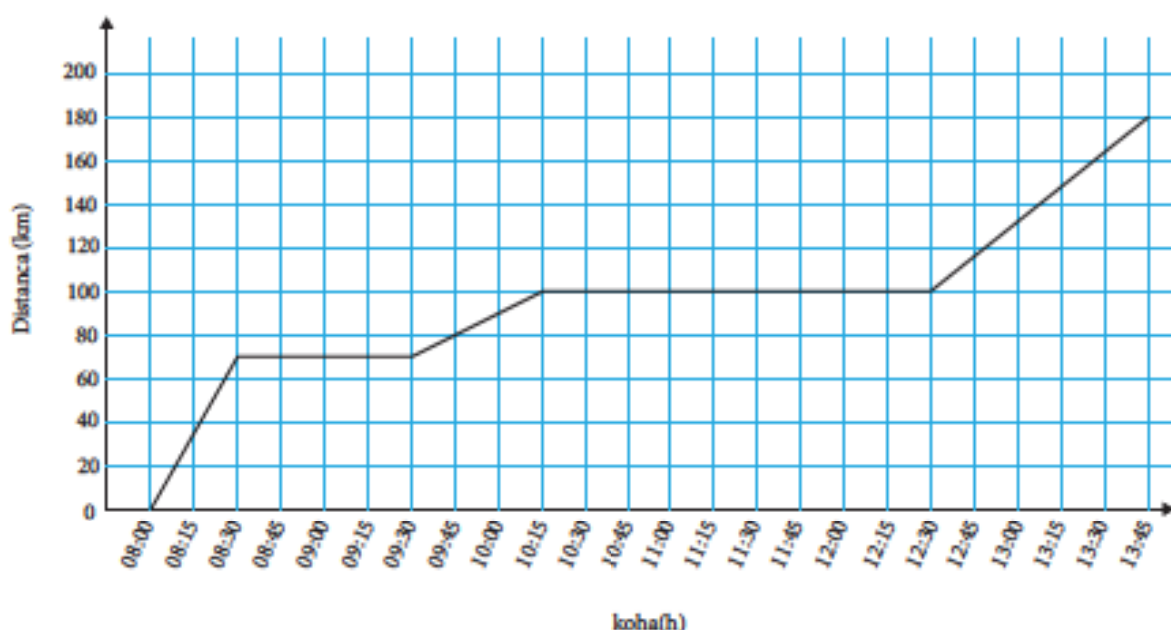
- Fillimi i ngjarjes: 09:00
 - Pushimi i parë: 10:30 - 11:00
 - Pushimi i dytë: 13:00 - 14:15
 - Përfundimi i ngjarjes: 16:00
- Sa kohë do të zgjasë ngjarja pa pushime?
 - Sa kohë është planifikuar për pushim?
 - Llogaritni intervalin kohor nga fillimi deri në përfundimin e ngjarjes. Shkruani kohëzgjatjen në minuta.

Shembulli 2

Igori udhëton nga Shkupi në Manastir me ndalesa gjatë rrugës. Përdor grafikun për të plotësuar tabelën me orarin e aktiviteteve të tij gjatë udhëtimit dhe më pas llogaritni.

Distanca e përshkruar sipas orëve:

Udhëtimi i Igorit



a) Vizatoni tabelën në fletore.

Aktiviteti	Koha në shënimin 24 - orësh
Pjesa e parë e udhëtimit	
Ndalesa e parë për një pushim të shkurtër	
Pjesa e dytë e udhëtimit	
Ndalesa e dytë për drekë	
Pjesa e tretë e udhëtimit	

- b) Në çfarë ore Igori bëri ndalesën e parë dhe sa kohë zgjati ajo?
- c) Sa kohë qëndroi për drekë?
- ç) Sa kohë në total dhe sa kilometra përshkoi duke udhëtuar nga Shkupi në Manastir?
- d) Sa kilometra përshkoi Igori para se të ndalej për drekë?
- dh) Nëse Igori nuk do të ndalej fare, sa kohë do të zgjaste udhëtimi?

Zgjidhje:

a) Tabela – Koha e aktiviteteve në shënimin 24 – orësh

Aktiviteti	Koha në shënimin 24 - orësh
Pjesa e parë e udhëtimit	08:00-08:30
Ndalesa e parë për një pushim të shkurtër	08:30-09:30
Pjesa e dytë e udhëtimit	09:30-10:15
Ndalesa e dytë për drekë	10:15-12:30
Pjesa e tretë e udhëtimit	12:30-13:45

- b) Igori bëri ndalesën e parë në 08:30 dhe ajo zgjati deri në 09:30, pra zgjati 1 orë (9h 30min – 8h 30 min = 1 h).
- c) Dreka filloi në 10:15 dhe përfundoi në 12:30.
Pra zgjati 12h 30min – 10h 15min = 2h 15min
- ç) Për të llogaritur kohën totale të kaluar në udhëtim, e marrim kohën e nisjes dhe kohën e mbërritjes nga grafiku (ose tabela), e më pas e llogaritim diferencën, përkatësisht 13h 45min – 8 h = 5 h 45 min. Nga grafiku lexohet se cila është vlera përfundimtare për kilometrat e kaluar në fund të udhëtimit në orën 13:45; kilometrat i lexojmë në boshtin y. Kështu përfundojmë se Igori kishte kaluar 180 kilometra.
- d) Nga grafiku lexohet se deri në 10:15, para ndalesës për drekë, Igori kishte kaluar 100 kilometra.
- dh) Nëse Igori nuk do të kishte bërë ndalesa fare, koha e udhëtimit do të llogaritej në dy mënyra, edhe atë: ose duke mbledhur gjitha intervalet kohore në lëvizje ose nga koha e përgjithshme e udhëtimit i minusojmë intervalet kohore kur Igori ndaloj për pushim dhe drekë. Këtu do të llogaritim sipas mënyrës së dytë:
 $5h\ 45min - (1h + 2h\ 15min) = 5h\ 45min - 3h\ 15min = 2h\ 30min$.

Detyra 2

Paraqitni me grafik ndryshimin e temperaturës trupore që ka pasur Enesi gjatë një dite ndërsa ishte me grip. Nga grafiku përcaktoni:

- a) Sa kohë ka pasur temperaturë mbi 38°C?
- b) Në çfarë ore temperatura i është ulur në 36°C?
- c) Cilin nivel të temperaturës trupore e ka pasur më gjatë gjatë ditës?
- ç) Në orën 14:30 ka marrë një tabletë kundër temperaturës së lartë. Sa minuta kanë kaluar derisa temperatura ka rënë në 37.5°C?

Temperatura sipas orëve

Koha (h)	Temperatura (°C)
7:00	37
9:30	38
14:15	39
18:00	38
21:00	37,5
21:30	37
22:30	36

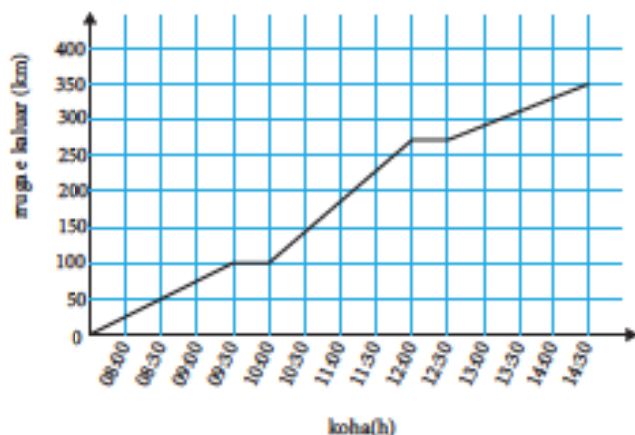
Shembulli 3

Planifikimi i një udhëtimi. Ti dhe familja jote po planifikoni të udhëtoni nga qyteti juaj në një vendpushim malor për fundjavë. Plani është që udhëtimi të zhvillohet në këtë mënyrë: paradite me makinë dhe pasdite me autobus. Gjatë udhëtimit me makinë, dëshironi të bëni një pushim dhe të mos e humbisni autobusin. Për të bërë një vlerësim të saktë të kohës së udhëtimit, përdorni orarin e aktiviteteve dhe grafikun.

- Sa kohë gjithsej do të zgjasë udhëtimi nga qyteti yt deri te vendpushimin malor?
- Sa kohë kalon ndërmjet arritjes në stacionin e autobusit dhe nisjes së autobusit?
- Si do të udhëtonit nëse doni të arrini më herët në vendpushim? Cilën pjesë të udhëtimit do ta shkurtonit?
- Llogaritni sa kohë kalon nga fillimi i udhëtimit deri në arritjen në vendpushim?
- Sa minuta më vonë do të fillojë udhëtimi nëse makina niset në ora 8:45 në vend të 8:00? Nëse nuk ka pushime gjatë rrugës, a do të arrijë në kohë në stacionin e autobusit përpara nisjes së autobusit?

Koha e nevojshme për përshkrimin e rrugës

Planifikimi i udhëtimit



Zgjidhje:

- Koha totale e udhëtimit është: $14\text{ h }30\text{ min} - 8\text{ h} = 6\text{ h }30\text{ min}$.
- Koha ndërmjet mbërritjes në stacionin e autobusit dhe nisjes së autobusit është: $12\text{ h }30\text{ min} - 12\text{ h} = 30\text{ minuta}$.
- Nëse dëshironi të arrini më herët, mund të shkurtoni kohën e pushimeve dhe të ndryshoni pjesën e dytë të udhëtimit — në vend të autobusit, ta bëni me makinë. Nga grafiku shihet qartë se udhëtimi me makinë është më i shpejtë — për intervale të ngjashme ose më të shkurta me makinë përshkohen distanca më të mëdha sesa me autobus. Për shembull: me autobus për 2 h përshkohen 80 km, ndërsa me makinë në pjesën e parë — 105 km për 1 h 30 min dhe pas pushimit — 160 km për 2 h.
- Koha totale e vozitjes (pa pushime dhe pritje për autobus) është: $6\text{ h }30\text{ min} - (30\text{ min} + 30\text{ min}) = 6\text{ h }30\text{ min} - 1\text{ h} = 5\text{ h }30\text{ min}$.
- Udhëtimi fillon 45 minuta më vonë, pra në orën 8h 45min. Nëse gjatë udhëtimit me makinë nuk ka ndalesa, atëherë ti dhe familja jote do të arrini në stacionin e autobusit përpara nisjes së autobusit.

Detyra 3

Jepet orari i trenave nga Shkupi deri në Veles. Paraqitni udhëtimin me grafik.

- Sa kohë udhëton treni nga Lisiçja deri në Veles?
- Sa kohë i duhet trenit për të arritur nga Shkupi në Veles?
- Midis cilave dy stacione udhëtimi zgjat më gjatë dhe sa?
- Midis cilave dy stacione arrihet për periudhën më të shkurtër kohore?
- A ka stacione midis të cilave koha e udhëtimit është e njëjtë?
- Sa kilometra është distanca nga Draçeva deri në Veles?

Tabela – Koha e kaluar dhe distanca nga njëri në tjetrin vend

Vendi	Koha	Distanca e kaluar (km)
Shkup	06:20	0
Lisiçe	06:31	5
Draçevë	06:37	13
Oreshan	06:48	25
Veles	07:25	55

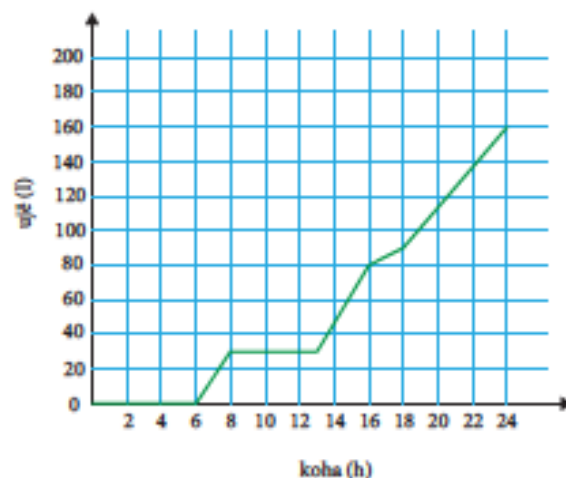
Detyra 4

Me grafik është dhënë konsumi i ujit i familjes Petrovski gjatë një dite.

- Sa litra ujë është konsumuar gjithsej gjatë gjithë ditës?
- Në cilat intervale kohore është konsumuar më shumë se 30 litra? Sa orë në total është kjo?
- Në cilën periudhë të ditës konsumohet më shumë ujë?
- Sa orë gjatë ditës konsumohet më pak se 30 litra?
- Llogarit sa do të ishte konsumi i ujit për një muaj nëse këto të dhëna do të vlenin për çdo ditë të muajit.
- Nëse 1000 litra ujë kushtojnë 40 denarë, sa do të ishte fatura mujore e kësaj familjeje?
- Çfarë aktivitete do të shkaktonin konsum më të madh të ujit në pjesë të ndryshme të ditës?
- Shikoni faturën e ujit të familjes tuaj dhe mendoni si mund të kurseni ujin dhe kështu të kurseni edhe para që paguani për ujin.

Harxhimi i ujit në periudha kohore

Uji i harxhuar i familjes Petrovski



Mendoni për rëndësinë e llogaritjes së saktë të intervaleve kohore. Në cilën situatë nga jeta juaj mendoni se është më e rëndësishme të llogaritni me saktësi intervalet kohore? Shkruani një shembull konkret nga përditshmëria juaj ku njohuritë e fituara më parë do t'u ndihmojnë të organizoni disa aktivitete.

Shkruani në fletoren tuaj përgjigjet për pyetjet e mëposhtme. Vlerësoni veten nga 1 deri në 4, ku:

- 1 – Nuk mund ta zgjidh problemin.
 - 2 – Mund të zgjidh disa detyra, por kam nevojë për ndihmë.
 - 3 – Mund të zgjidh vetë detyrat dhe të shpjegoj konceptet bazë.
 - 4 – I zgjidh lehtë detyrat, mund të shpjegoj të gjitha hapat dhe t'i aplikoj në situata të përditshme.
1. Mund të lexoj dhe kuptoj orarin dhe ta përdor për llogaritjen e intervaleve kohore.
 2. Mund të llogaris saktë intervalet kohore midis aktiviteteve të ndryshme duke përdorur njësi të ndryshme (sekonda, minuta, orë, ditë, javë).
 3. Arrij të kuptoj dhe përdor grafikët për llogaritjen e intervaleve kohore.
 4. Mund të aplikoj orarin dhe llogaritjen e intervaleve kohore në situata reale, si organizimi i ditës së punës ose orarit të aktiviteteve.

Në varësi të vetëvlerësimit, mendoni se cilat fusha mund t'i përmirësoni. Nëse jeni vlerësuar me 1 ose 2 në ndonjë prej pohimeve, rishikoni detyrat përkatëse dhe kërkon ndihmë shtesë për të kuptuar më mirë.

Punë e pavarur

1. Është lajmëruar një autobus që duhet të niset nga qyteti yt në ora 10:25 dhe të arrijë në qytetin fqinj në ora 14:00. Sa do të zgjasë udhëtimi? Llogaritni intervalin kohor dhe shkruani në orë dhe minuta.
2. Shpërndarja e orëve e një dite shkollë është me sa vijon:
 - a) Sa kohë zgjasin vetëm orët, pa llogaritur kohën e pushimeve?
 - b) Sa kohë, në orë dhe minuta, do të kaloni në shkollë nga fillimi e deri në përfundimin e orës së fundit?
3. Planifikoni një orar për 5 aktivitete të ndryshme gjatë ditës (p.sh.: hulumtim, shkrim, pushim, korrigjim, përfundim). Llogaritni sa kohë do ju duhet gjithsej për t'i përfunduar të gjitha aktivitetet.
4. Ana planifikon një udhëtim:
 - Do të niset më 10 mars dhe do të udhëtojë për 12 ditë.
 - Më pas do të qëndrojë në shtëpi për 5 ditë para se të niset përsëri për një udhëtim që do të zgjasë 8 ditë.
 - a) Në cilën datë Ana do të kthehet nga udhëtimi i parë?
 - b) Kur do të përfundojë udhëtimi i dytë?
5. Në shkollë ka pushim dimëror që zgjat 3 javë. Fillon më 20 dhjetor. Nxënësit kthehen në shkollë të hënën e parë pas pushimeve.
 - a) Në cilën datë përfundojnë pushimet?
 - b) Cila është data e ditës së parë të shkollës?
6. Ekipi i xhirimit të një filmi ka orar të aktiviteteve të dhënë si në tabelë:
 - a) Sa kohë, gjithsej, zgjasin gjitha xhirimet?
 - b) Sa kohë, gjithsej, kanë për pushim dhe drekë?

Shpërndarja e orëve

Ora	Koha e fillimit dhe e mbarimit të orës
1	08:00-08:45
2	09:00-09:45
3	10:00-10:45
4	11:00-11:45
5	12:00-12:45
6	13:00-13:45

Koha e nevojshme për xhirimin e skenave

Xhirimi i skenës 1	08:30-10:15
Pushim	10:15-10:45
Xhirimi i skenës 2	10:45-12:00
Drekë	12:00-13:00
Xhirimi i skenës 3	13:00-15:30

7. Ivana punon në një projekt që zgjat 90 ditë dhe fillon më 1 shkurt. Projekti është i ndarë në 3 faza të barabarta.
- Sa ditë zgjat secila fazë?
 - Në cilën datë përfundon secila nga fazat?
 - Kur do të përfundojë i gjithë projekti?
- Bëni llogaritje për vit jo të brishtë dhe vit të brishtë.
8. Orari i trenave:
- Treni 1: Nis nga Shkupi në 08:20 dhe arrin në Veles në 09:05.
 - Treni 2: Nis nga Velesi në 09:20 dhe arrin në Gjevgjeli në 11:15.
- Sa kohë udhëton treni 1 nga Shkupi deri në Veles?
 - Sa kohë pret udhëtari në stacionin e Velesit për të kapur trenin 2, nëse më parë ka udhëtuar me trenin 1?
 - Sa kohë i duhet, në total, udhëtarit nga Shkupi deri në Gjevgjeli, duke përfshirë edhe kohën e pritjes?

Perimetri i trekëndëshit dhe katërkëndëshit

Në jetën e përditshme shpesh hasni me problemet e përcaktimit të perimetrit të formave siç janë trekëndëshat, katrorët ose shumëkëndëshat e tjerë. Perimetri përfaqëson gjatësinë e përgjithshme të të gjitha brinjëve të një forme. Në këtë njësi mësimore do të rikujtojmë konceptet bazë dhe do të mësojmë si të llogaritim perimetrin e trekëndëshit dhe katrorit në situata të ndryshme.



Shembulli 1

Po ndihmon në rregullimin e një kopshti me formë të parregullt që ka 6 anë (brinjë). Është marrë qëndrim të vendoset një gardh i ulët prej druri rreth kopshtit për të mbrojtur lulet. Gjatësitë e anëve të kopshtit janë: 2 m, 3 m, 4 m, 3 m, 5 m dhe 4 m.

- Gardhi shitet në paketa prej 10 metrash. Sa paketa gardh duhet të blini?
- Nëse një paketë kushton 500 denarë, sa para do të shpenzoni?
- Nëse kopshti duhet të rregullohet në mënyrë që anët (brinjët) të jenë të barabarta (p.sh., një gjashtëkëndësh i rregullt), sa do të jetë gjatësia e secilës brinjë nëse perimetri mbetet i njëjtë?

Zgjidhje:

- Për ta përcaktuar gjatësinë totale të gardhit që duhet ta vendosni, duhet të mbledhni gjatësitë e të gjitha anëve: $2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 4 = 21$ m. Nëse gardhi shitet në paketa prej 10 m, atëherë do të duhet të blini: $21 \text{ m} : 10 \text{ m} = 2.1$ paketa. Pra, do të nevojiten 3 paketa, sepse 2 paketa janë 20 m dhe mungon edhe 1 m.
- Nëse një paketë kushton 500 denarë, atëherë 3 paketa do të kushtojnë: $3 \cdot 500 = 1500$ denarë.
- Nëse shumëkëndëshi është gjashtëkëndësh i rregullt, atëherë të gjitha brinjët kanë gjatësi të barabartë, le të themi a . Perimetri llogaritet: $P = 6 \cdot a$. Sipas kushteve të detyrës, perimetri i gjashtëkëndëshit të rregullt duhet të jetë i njëjtë me perimetrin e gjashtëkëndëshit të mëparshëm nga detyra nën a), prandaj kemi $21 \text{ m} = 6 \cdot a$, $a = 21 \text{ m} : 6 = 3.5$ m.

Detyra 1

Imagjinoni se po organizoni një garë në një shteg me formë të parregullt që ka 6 brinjë, ndërsa gjatësitë e tyre janë: 10 m, 15 m, 12 m, 20 m, 18 m dhe 25 m.

- Sa është gjatësia totale e shtegut që duhet të përshkojnë garuesit?
- Nëse gara përbëhet nga 5 përshkime të shtegut, sa është gjatësia totale që do të përshkojë secili garues?
- Për ta shënuar shtegun me shirit, blini paketa me shirita prej 50 m. Sa paketa shiritësh do të nevojiten për gjithë shtegun?
- Nëse duhet të shtoni edhe një anë për ta bërë shtegun me 7 brinjë, sa do të ishte gjatësia e asaj brinje nëse dëshironi që perimetri i përgjithshëm të jetë saktësisht 110 m?

Shembulli 2

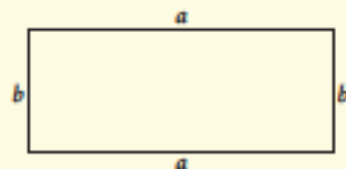
Ajsheja organizon një piknik në park dhe dëshiron të vendosë një shirit dekorues rreth hapësirës ku do të ulet me shoqet e saj. Hapësira për piknik ka formë drejtkëndore me brinjë me gjatësi 6 m dhe 4 m. Përveç kësaj, ajo ka vendosur të krijojë edhe një hapësirë më të vogël trekëndore për lojë, me anë brinjë 3 m, 4 m dhe 5 m. Sa shirita dekorues i nevojiten Ajshe në total?

Zgjidhje:

Për të llogaritur sa shirita dekorues i duhen Ajshes për hapësirën drejtkëndore ku do të ulet, llogaritet perimetri i drejtkëndëshit:

Perimetri i drejtkëndëshit = $2 \cdot \text{gjatësia} + 2 \cdot \text{gjerësia}$, ose perimetri i drejtkëndëshit është = $2 \cdot (\text{gjatësia} + \text{gjerësia})$. Pse?

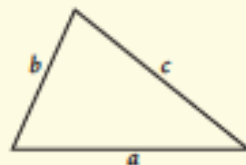
Perimetrin e shënojmë me shkronjën P . Nëse gjatësinë dhe gjerësinë e drejtkëndëshit i shënojmë me, për shembull a dhe b , atëherë perimetri mund të shkruhet si: $P = 2a + 2b$ ose $P = 2(a + b)$. Perimetri i hapësirës ku do të ulet Ajsheja me shoqet është: $P = 2 \cdot (6 \text{ m} + 4 \text{ m}) = 2 \cdot 10 \text{ m} = 20 \text{ m}$.



Për të llogaritur sa shirit dekorues i duhet për hapësirën në formën e trekëndëshit brinjëndryshëm, duhet të mbledhim të tri brinjët, përkatësisht $P = a + b + c$.

Hapësira trekëndore ka perimetër: $P = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ m}$.

Në fund, për të llogaritur gjatësinë e përgjithshme të shiritit dekorues që i nevojitet Ajshes, duhet të mbledhim perimetrat e dy hapësirave, përkatësisht $20 \text{ m} + 12 \text{ m} = 32 \text{ m}$. Nëse Ajsheja ka shirit me gjatësi 30 m, a do t'i mjaftojë shiriti apo do t'i mungojë?

**Detyra 2**

Njihsoni perimetrin e trekëndëshit, nëse brinjët e tij kanë gjatësitë 5 cm, 7 cm dhe 10 cm, përkatësisht.

Detyra 3

Njihsoni perimetrin e drejtkëndëshit me gjatësi 8 cm dhe gjerësi 5 cm.

Detyra 4

Vizatoni në fletore tabelën dhe plotësoni fushat e zbrazëta!

Trekëndësh	Formula për perimetrin e trekëndëshit

Detyra 5

Vizatoni në fletore tabelën dhe plotësoni fushat e zbrazëta!

Katërkëndësh	Formula për perimetrin e katërkëndëshit
drejtkëndësh 	
katror 	
romb 	
paralelogram 	
trapezoid 	
deltoid 	

Detyra 6

Një arë ka formën e një trapezi me dy krahë të barabartë. Të dy krahët e barabartë kanë gjatësi 7 m, përkatësisht, ndërsa bazat kanë gjatësi 8 m dhe 12 m.

- Sa është perimetri i arës?
- Nëse vendosni të shkurtoni gjatësinë e bazës më të madhe për 2 m, sa do të jetë perimetri i ri i arës?
- Nëse vendosni të shkurtoni gjatësinë e secilit krah për 1 m, sa do të jetë perimetri i ri i arës?

Shembulli 3

Ti je një projektues që duhet të bësh korniza për piktura me formë drejtkëndore me gjerësi y dhe gjatësi $2y$. Disa prej kornizave përmbajnë pjesë dekorative të vendosura në kornizën drejtkëndore. Pjesët dekorative kanë formë trekëndëshi barakrahës me bazë 8 cm dhe krah x cm.

- Shprehni krahun x të trekëndëshit nëpërmjet perimetrit dhe bazës.
- Nëse e dini se perimetri i trekëndëshit është 28 cm, sa është gjatësia e krahut x ?
- Shprehni perimetrin e drejtkëndëshit si funksion të y .
- Nëse perimetri i drejtkëndëshit është 60 cm, gjeni gjatësitë e brinjëve y dhe $2y$.

Zgjidhje:

- Perimetri i trekëndëshit është $P = 8 + 2x$. Duhet të shprehim krahun x nëpërmjet bazës dhe perimetrit. Kemi $2x = P - 8$, $x = \frac{P-8}{2}$.
- Nën a) kemi shprehur krahun x përmes perimetrit P dhe bazës. Baza është e njohur, 8 cm. Nëse edhe perimetri është i njohur, 28 cm me zëvendësim në $x = \frac{P-8}{2}$ kemi $x = \frac{28-8}{2}$, $x = \frac{20}{2}$, $x = 10$. Pra, krahu është 10 cm gjatë.
- Nëse gjatësia e drejtkëndëshit është $2y$ dhe gjerësia është y , atëherë perimetri i drejtkëndëshit është $P = 2y + 2 \cdot (2y) = 2y + 4y = 6y$.
- Nëse perimetri i drejtkëndëshit është 60 cm, atëherë duke marrë zëvendësimin në $P = 6y$, $60 = 6y$, $y = \frac{60}{6} = 10$. Gjatësitë e brinjëve të drejtkëndëshit do të jenë 10 cm dhe 20 cm..

Detyra 7

Ke për detyrë të rregullosh një kopsht dhe rreth tij të vendosësh një shteg. Kopshti ka formë katërkëndëshi të parregullt, ku njëra prej brinjëve është e gjatë a metra, brinja e dytë $2a$ metra, brinja e tretë b metra dhe brinja e katërt $b + 3$ metra. Kopshti kufizohet në njërin anë me një lulishte të vogël në formë trekëndëshi barabrinjës, ku çdo brinjë është c metra e gjatë.

- Shprehni perimetrin e kopshtit nëpërmjet a dhe b .
- Shprehni perimetrin e lulishtes nëpërmjet c .
- Nëse perimetri i përgjithshëm i kopshtit është 50 metra dhe brinja a është 4 metra më e shkurtër se b , gjeni vlerat e a dhe b .
- Nëse perimetri i lulishtes është 18 metra, sa është gjatësia e brinjës c ?
- Sa është gjatësia totale e shtegut që duhet të vendosësh, nëse shtegu i rrethon edhe kopshtin edhe lulishten?

Nëse ke dy trekëndësha me të njëjtin perimetër, a do të kenë ata gjithmonë gjatësi të njëjtë të brinjëve të tyre? Shpjegoni pse dhe jepni një shembull.

Përgjigjuni pyetjeve në fletoren tuaj. Pastaj ndani përgjigjet me shokun/shoqen ose shokët/shoqet e klasës.

Shikoni të gjitha ushtrimet e zgjidhura nga kjo njësi mësimore.

1. Cila detyrë ishte më e lehta për ty?
2. Cila ishte më e vështira?
3. A u ndjeve i/e sigurt kur bëje llogaritjet e perimetrit të trekëndëshit dhe katërkëndëshit?
4. Çfarë mësove dhe si mund t'i përdorësh këto njohuri në jetën reale?
5. Cilat njohuri dëshiron t'i përmirësosh?

Punë e pavarur

1. Vendi i parkimit ka formë të drejtkëndëshit. Gjatësia e njërës brinjë është x metra, ndërsa gjerësia është $2x$ metra. Sa do të jetë gjatësia totale e rrethojës përreth vendit të parkimit? (Shprehni perimetrin si funksion të x)
2. Në oborrin e kopshtit të fëmijëve ndodhet një vazo e madhe me formë trekëndëshi barakrahës. Dy brinjët (krahët) e barabarta janë të gjata $2y$ metra, ndërsa baza është e gjatë $3y$ metra. Shprehni perimetrin e vazos si funksion të y .
3. Oborri ka formë katërkëndëshi. Njëra brinjë është e gjatë a metra, ndërsa brinja përballë saj është $2a$ metra. Dy brinjët e tjera janë b dhe $b + 4$ metra. Shprehni perimetrin e oborrit si funksion të a dhe b .
4. Shtegu i vrapimit ka formën e një trekëndëshi brinjëndryshëm dhe ka brinjët: x , $x + 4$ metra dhe $2x$ metra, përkatësisht. Shprehni perimetrin e shtegut si funksion të x .
5. Fusha e lojërave ka formë drejtkëndëshe. Gjatësia është y metra, ndërsa gjerësia është $y - 5$ metra. Shprehni perimetrin e fushës si funksion të y .
6. Kopshti ka formë trekëndëshi barakrahës (dybrinjëshëm). Dy brinjët e barabarta janë z metra, ndërsa baza është $1,5 z$ metra.
 - a) Shprehni perimetrin e kopshtit si funksion të z .
 - b) Sa është perimetri i kopshtit nëse $z = 7\frac{1}{4}$ m?
7. Shtëpia është e rrethuar me një gardh në formë katërkëndëshi. Njëra brinjë është x metra, brinja e dytë është $x + 3$ metra, ndërsa dy brinjët e tjera janë y dhe $y + 2$ metra.
 - a) Shprehni perimetrin e gardhit si funksion të x dhe y .
 - b) Sa është gjatësia e gardhit nëse $x = 6$ m dhe $y = 9$ m?

8. Fusha e lojërave ka formë të një pesëkëndëshi. Gjatësitë e brinjëve janë $2a$ metra, $3a$ metra, a metër, $a + 2$ metra dhe $4a$ metra.
 - a) Shprehni perimetrin e fushës si funksion të a .
 - b) Llogaritni perimetrin e fushës nëse $a = 22,5$ m.
9. Një paralelogram ka gjatësinë 10 m, ndërsa perimetri i tij është 36 metra. Llogaritni brinjën tjetër të paralelogramit.
10. Vendi i parkimit ka formë trapezi barakrahës me bazat 15 m dhe 9 m, ndërsa perimetri është 42 metra. Llogaritni gjatësinë e krahut të trapezit.
11. Në hyrje të parkut ka një dekorim në formë rombi. Llogaritni gjatësinë e brinjës së rombit, nëse perimetri është 32 m.
12. Një fluturake në formë trapezoidi ka brinjët: 18 dm, 12 dm dhe 11 dm, ndërsa perimetri është 58 m. Llogaritni brinjën e katërt të fluturakes.
13. Një varëse ka formën e një deltoidi me brinjë 11 mm dhe perimetër 3,2 cm. Llogaritni brinjën tjetër të varësës.
- *14. Një nga këndet e rombit është 120° , ndërsa diagonalja më e vogël është 8,5 cm. Llogaritni perimetrin e rombit.
- *15. Brinja më e shkurtër e një drejtkëndëshi është 5 cm dhe simetralja e një këndi të tij e ndan brinjën më të gjatë në dy segmente, njëri prej të cilëve është 4 cm. Llogaritni perimetrin e drejtkëndëshit.
- *16. Diagonalja e një katrori është 12 cm. Nëpër kulmet e katrorit janë tërhequr drejtëza paralele me diagonalet. Përcaktoni llojin dhe perimetrin e katërkëndëshit të formuar.
- *17. Krahët dhe baza më e vogël e një trapezi janë nga 8 cm. Baza më e madhe është $\frac{3}{8}$ e shumës së tri brinjëve të tjera. Përcaktoni perimetrin e trapezit.
- *18. Këndi mes dy brinjëve të barabarta të një deltoidi është 60° , ndërsa diagonalja që lidh kulmet e këndeve të barabarta është 5 cm. Llogaritni perimetrin e deltoidit, nëse njëra prej brinjëve të tij është 7,5 cm.

Syprina e formave të ndërlikuara 2D

Në këtë njësi mësimore do të njiheni me metodat për llogaritjen e sipërfaqes së formave të ndërlikuara 2D, të përbëra nga katrorë, drejtkëndësha dhe trekëndësha kënddrejtë. Do t'i analizoni pjesët e këtyre formave, do të përdorni formula dhe do të mësoni si ta thjeshtoni procesin e llogaritjes.

Përmes këtij mësimi do të kuptoni sa e rëndësishme është njohja e njësive të matjes dhe zbatimi i tyre në jetën e përditshme, për shembull, gjatë llogaritjes së syprinës së një dhome, oborri apo ndonjë sipërfaqeje tjetër.



Shembulli 1

Davidi dëshiron të vendosë pllaka në dyshtemenë e dhomës së tij. Dhoma ka formë drejtkëndëshe me gjatësi 4 m dhe gjerësi 3 m. Pllakat që do të përdorë janë në formë katrori me brinjë 30 cm.

- a) Sa është sipërfaqja e dhomës në metra katrorë (m^2)?
- b) Sa është sipërfaqja e dhomës në centimetra katrorë (cm^2)?
- c) Sa pllaka i duhen për të mbuluar gjithë dyshtemenë, pa marrë parasysh mbetjet nga prerja?

Zgjidhje:

Udhëzim për c): Numri i pllakave të nevojshme = Sipërfaqja e dhomës në cm^2 : Sipërfaqja e një pllake në cm^2 , pra $120000\text{ cm}^2 : 900\text{ cm}^2 = 133,3$ pllaka. Duhet 133 apo 134 pllaka? Në cilin numër të plotë duhet të rrumbullakohet?

Shembulli 2

Maria dëshiron të vendosë një kornizë druri rreth një kopshti me lule në formë të një trekëndëshi kënddrejtë. Njëra katetë e kopshtit është 4 m e gjatë, ndërsa kateta tjetër është 3 m e gjatë. Sa është sipërfaqja e kopshtit në metra katrorë (m^2)?

Zgjidhje:

Formula për syprinën e trekëndëshit kënddrejtë është:

$$\text{syprina} = \frac{\text{kateta}_1 \cdot \text{kateta}_2}{2}, \text{ përkatësisht } S = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Duke zëvendësuar vlerat e katetave në formulë, kemi: $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\text{ m}^2$.

Pra, syprina e kopshtit është 6 m^2 .

Detyra 1

Zyra e punës në formë drejtkëndëshi ka gjatësi 120 cm dhe gjerësi 60 cm. Llogaritni syprinën e zyrës së punës.

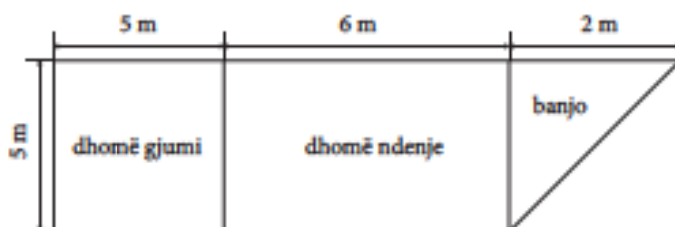
Detyra 2

Katrori ka brinjë 15 cm.

- Sa është syprina e katrorit në decimetra katrorë (dm^2)?
- Sa është gjatësia e një drejtkëndëshi që ka syprinë të barabartë me atë të katrorit dhe gjerësi 9 cm?

Shembulli 3

Milica ka blerë një apartament me shpërndarje të brendshme si në figurë. Dyshemeja e dhomës së gjumit ka formën e një katrori, dhoma e ditës ka formën e një drejtkëndëshi, ndërsa banja ka formën e një trekëndëshi drejtkëndor. Milica dëshiron të mbulojë dyshemenë, në të gjitha dhomat e apartamentit, me pllaka. Ndiemoni t'i bëjë llogaritjet.



- Sa është syprina e përgjithshme e apartamentit?
- Nëse Milica dëshiron të mbulojë gjysmën e apartamentit me parket, sa është syprina që duhet të mbulohet me parket?

Zgjidhje:

- Syprina e përgjithshme e apartamentit është shuma e syprinave të të gjitha hapërisrave, përkatësisht katrorit, drejtkëndëshit dhe trekëndëshit kënddrejtë.

Syprina e dhomës së gjumit, që ka formë katrori, llogaritet me formulën $S = a^2$, nga ku me zëvendësim fitojmë $S_k = a^2 = 5^2 = 25 \text{ m}^2$.

Syprina e dhomës së ndenjës llogaritet me formulën për syprinën e drejtkëndëshit, përkatësisht $S_n = a \cdot b = 5 \cdot 6 = 30 \text{ m}^2$.

Për syprinën e banjës, nga kushti i detyrës, njera katetë ka gjatësi 2 m dhe kateta tjetër është e barabartë me gjerësinë e drejtkëndëshit, domethënë 5 m.

Syprina e trekëndëshit kënddrejtë $= \frac{\text{kateta}_1 \cdot \text{kateta}_2}{2}$, përkatësisht $S = \frac{a \cdot b}{2}$.

Me zëvendësimet e kateteve në formulë, 2 m dhe 5 m, përkatësisht, gjejmë se syprina e trekëndëshit kënddrejtë është $S_t = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5 \text{ m}^2$.

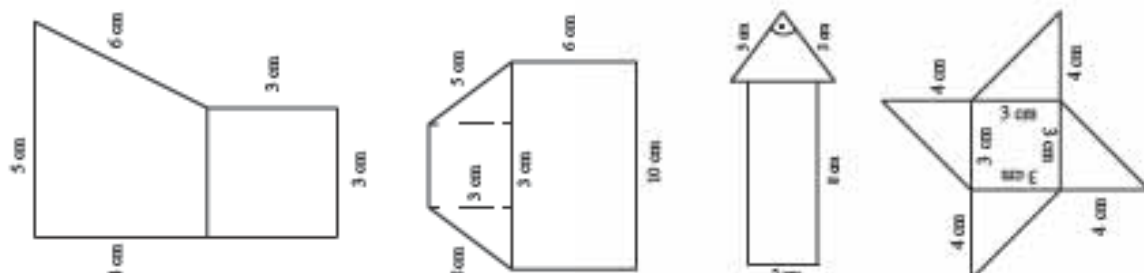
Syprina e përgjithshme e apartamentit është shuma e syprinave të katrorit, drejtkëndëshit dhe trekëndëshit kënddrejtë.

Syprina e përgjithshme = Syprina e dhomës së gjumit + Syprina e dhomës së ndenjës + Syprina e banjës, përkatësisht $S = S_k + S_n + S_t = 25 \text{ m}^2 + 30 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$.

- Gjysma e syprinës së përgjithshme është $\frac{1}{2}$ e 60 m², përkatësisht 30 m².

Detyra 3

Njehsoni syprinën e secilës nga format e ndërlikuara 2D.



Shembulli 4

Sara dëshiron të bëjë një panel dekorativ muri nga tre lloje pllakëza druri. Paneli përbëhet nga një katror, një drejtkëndësh dhe një trekëndësh kënddrejtë. Dimensionet e panelit janë si më poshtë:

- Katrori ka brinjë prej 51 cm.
 - Drejtkëndëshi ka gjatësi 80 cm, kurse gjerësinë sa dy të tretat e brinjës së katrorit.
 - Njëra katetë e trekëndëshit kënddrejtë është e barabartë me gjerësinë e drejtkëndëshit, ndërsa kateta tjetër është 40 cm.
- a) Shprehni gjerësinë e drejtkëndëshit në varësi të brinjës së katrorit dhe njehsoni vlerën e saj.
- b) Sa është syprina e përgjithshme e panelit në centimetra katrorë (cm^2)?
- c) Shndërroni syprinën e përgjithshme të panelit në metra katrorë (m^2).
- d) Nëse Sara dëshiron vetëm katrorin dhe drejtkëndëshin t'i lyej me llak mbrojtës, sa është syprina në decimetra katrorë (dm^2) e sipërfaqes së lyer?



Zgjidhje:

- a) Njehsimi i gjerësisë së drejtkëndëshit përmes brinjës së katrorit:
Sipas kushtit të detyrës, gjerësia e drejtkëndëshit është $\frac{2}{3}$ e brinjës së katrorit, përkatësisht $\frac{2}{3} \cdot 51 \text{ cm} = 34 \text{ cm}$.
- b) Llogaritja e syprinës së katrorit: $S_k = a^2 = (51 \text{ cm})^2 = 2601 \text{ cm}^2$.
Llogaritja e syprinës së drejtkëndëshit: $S_d = 80 \text{ cm} \cdot 34 \text{ cm} = 2720 \text{ cm}^2$.
Llogaritja e syprinës së trekëndëshit kënddrejtë: $S_t = \frac{34 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}}{2} = 680 \text{ cm}^2$.
Syprina e përgjithshme e panelit është
 $S = S_k + S_d + S_t = 2601 \text{ cm}^2 + 2720 \text{ cm}^2 + 680 \text{ cm}^2 = 6001 \text{ cm}^2$.
- c) Shndërrimi i syprinës së përgjithshme në m^2 :
E dimë që $1 \text{ m}^2 = 10,000 \text{ cm}^2$, kështu $S = 6001 : 10000 = 0,6001 \text{ m}^2$.
- ç) Syprina për lyerje është shuma e syprinave të katrorit dhe drejtkëndëshit, domethënë:
 $S = 2601 \text{ cm}^2 + 2720 \text{ cm}^2 = 5321 \text{ cm}^2 = (5321 : 100) \text{ dm}^2 = 53,21 \text{ dm}^2$.

Detyra 4

Në autostradë duhet të vendoset një tabelë rrugore prej pllake metalike drejtkëndëshe me përmasa 2 m dhe 1,2 m. Në pllakë duhet të pritët një hapje në formë trekëndëshi kënddrejtë me katetet 1,2 m dhe 0,8 m. Sa është syprina e metalit që mbetet, e shprehur në cm^2 ?

Dy forma të ndryshme të ndërlikuara 2D të përbëra nga katrorë, drejtkëndësha dhe trekëndësha kënddrejtë kanë syprinë të njëjtë. A do të thotë kjo se ato forma duhet patjetër të kenë perimetra të barabartë? Shpjegoni përgjigjen tuaj me një shembull.

Përpikuni të vlerësoni aftësitë e juaja në llogaritjen e syprinave të formave të ndërlikuara 2D. Cilat janë pikat e juaja të forta dhe në çfarë keni nevojë të përmirësoheni?

Punë e pavarur

1. Në një depo duhet të ruhen kuti kartoni, ku baza e çdo kutie ka dimensione 50 cm dhe 30 cm. Depoja ka syprinë dyshemeje të barabartë 24 m^2 . Sa kuti mund të vendosen në dysheme?
2. Duhet të lyhen dy dhoma, nga të cilat njëra ka mure drejtkëndëshe me brinjë 6 m dhe 2,5 m, kurse tjetra ka formë katrori me brinjë 6 m. Llogaritni syprinën e përgjithshme për lyerje dhe shprehni në cm^2 . Sa litra ngjyrë do të duhen nëse për 5 m^2 nevojitet 1 litër ngjyrë?
3. Një park ka një kopsht lulesh me formë katrori me brinjë 12 m. Përreth kopshtit vendoset një shteg me gjerësi 2 m. Llogaritni syprinën e përgjithshme të kopshtit dhe shtegut dhe shprehni në cm^2 .
4. Në një tavolinë ngrënieje me formë drejtkëndëshe me brinjë 1,8 m dhe 0,9 m vendoset një mbulesë në formë trekëndëshi barakrahës kënddrejtë me katete 15 cm.
 - a) Sa është syprina e mbulesës, e shprehur në mm^2 ?
 - b) Sa centimetra katrorë e tavolinës së ngrënies do të mbetet e pambuluar?
5. Dyshemeja e një salle është drejtkëndore me dimensione 8,5 m dhe 6 m. Sa pllaka në formë katrori me brinjë 20 cm do të nevojiten për të mbuluar 70% të dyshemesë?
6. Një projektues bën pasqyra dekorative. Ato kanë formë katrori me brinjë 80 cm, por në dy këndet e kundërta ka një dekor druri në formë trekëndëshi barakrahës drejtkëndor me katete 20 cm. Sa është syprina e pjesës së pastër të pasqyrës (pjesës së pambuluar)?

7. Dritaret e një shtëpie përbëhen nga korniza katrore me brinjë 1,5 m dhe hapje xhami drejtkëndore me dimensione 1,2 m dhe 0,8 m. Sa është syprina e pjesës prej druri për një dhe 10 dritare?
8. Në një dhomë drejtkëndore me dimensione 5 m dhe 4 m vendoset një tapet me dimensione 3 m dhe 2 m. Sa është syprina e sipërfaqes së dhomës që mbetet e pambuluar? Shprehni në dm^2 .
9. Një ndërtues vendos një bazë betoni në formë trekëndëshi drejtkëndor. Syprina e bazës së betonit është 24 m^2 dhe njëra nga katetet e trekëndëshit drejtkëndor është 8 m. Sa është kateta tjetër e bazës së betonit?
10. Në një kopsht ka një lulishte drejtkëndore me syprinë 15 m^2 dhe gjerësi 3 m. Sa është gjatësia e lulishtes?
11. Një shenjë trafiku me formë trekëndëshi drejtkëndor ka një katete 1,2 m dhe syprinë 0.72 m^2 . Sa është kateta tjetër e shenjës?
- *12. Një projektues bën një tabelë katrore me syprinë $2,56 \text{ m}^2$. Sa është gjatësia e brinjës së tabelës?
- *13. Një hapësirë në formë drejtkëndore është mbuluar me 36 m^2 laminat, kurse gjatësia e njërës brinjë është katërfish më e madhe se tjetra. Sa metra skajore duhet të blihen për t'i vendosur përgjatë skajeve të laminatit, domethënë përgjatë secilit mur të hapësirës?

Vëllimi dhe njësiti matëse për vëllimin

Në këtë njësi mësimore do të njiheni me konceptin e vëllimit, që është masa për pjesën e hapësirës që zë një formë 3D. Do të mësoni cilat njësi matëse përdoren për vëllimin, simbolet e tyre dhe lidhjet mes tyre. Ajo që do të mësoni do t'u ndihmojë të llogaritni vëllimin dhe të përdorni njësiti matëse në jetën e përditshme, si dhe në detyrat matematike që do t'i zgjidhni.

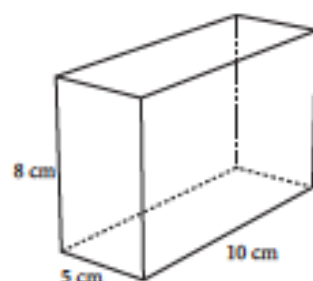


Shembulli 1

Në vizatim është dhënë një kuti në formë kuadri.

Përgjigjuni pyetjeve të mëposhtme:

- Sa është gjatësia e kutisë?
- Sa është gjerësia e kutisë?
- Llogaritni syprinën e murit të kutisë që ka gjatësi 10 cm dhe gjerësi 5 cm.
- Sa mure ka kutia me gjatësi 10 cm dhe gjerësi 8 cm?
- Shpjegoni pse kutia është formë 3D.



Zgjidhje:

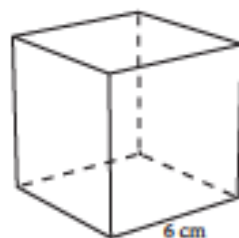
- Gjatësia e kutisë është 10 cm.
- Gjerësia e kutisë është 5 cm.
- $S = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$.
- Kutia ka dy mure me gjatësi 10 cm dhe gjerësi 8 cm.
- Kutia ka tre dimensione (10 cm, 5 cm, 8 cm), prandaj themi se kutia është formë 3D (tredimensionale), që do të thotë se ajo zë një pjesë të hapësirës ku ndodhet.

Detyra 1

Në vizatim është dhënë kubi.

Përgjigjuni pyetjeve në vijim:

- Sa është gjatësia e secilit teh të kubit?
- Llogaritni syprinën e një muri të kubit.
- Cilat objekte që përdorni në jetën e përditshme duken si kub? Jepni të paktën dy shembuj.



Çdo trup i ngurtë ka formën, madhësinë dhe pozicionin e vet. Lëngjet dhe gazrat nuk kanë formë të qëndrueshme, të përhershme. Forma e tyre varet nga ena në të cilën ndodhen.

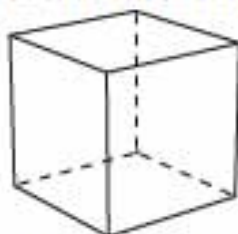


Pjesa e hapësirës që zë një formë 3D quhet vëllim i saj.

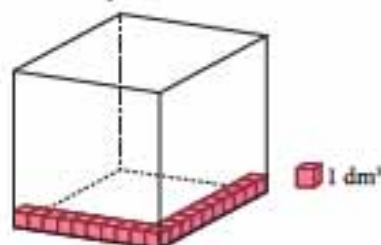
Shembulli 2

Masat për vëllimin nxirren nga masat për gjatësinë.

- a) Sa është vëllimi i kubit me teh një metër?



- b) Në figurë është dhënë një kub i zbrazët me vëllim 1 m^3 . Sa kube me vëllim 1 dm^3 do të mund t'i nxinte ky kub?



Zgjidhje:

- a) Vëllimi i kubit me teh 1 m është i barabartë me $1\text{ m} \cdot 1\text{ m} \cdot 1\text{ m}$, e që është 1 m^3 .
Shpjegoni pse.

Vëllimi i kubit me teh një metër (kubi njësi) është njësi matëse bazike që quhet metër kub dhe shënohet me 1 m^3 .

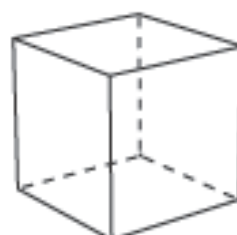
Të përcaktojmë vëllimin e një forme 3D në fakt do të thotë të përcaktojmë sa kube njësi përmbahen në formën e dhënë 3D.

- b) Nga më sipër shihet se në një rresht të kubit mund të vendosen $10 \cdot 10 = 100$ kube me teh 1 dm. Pse?
Pasi lartësia e kubit është 1 m, pra 10 dm, atëherë nëpër lartësinë mund të vendosen 10 rreshta me nga 100 kube secili, pra $10 \cdot 100 = 1000$ kube. Mund të përfundojmë se $1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3$.

$$1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3$$

Detyra 2

- a) Në vizatim është dhënë një kuti bosh në formë kubi me teh 1 dm.
Sa kuti të vogla në formë kubi me teh 1 cm mund të vendosni në kutinë me teh 1 dm?



Duke zgjidhur shembullin 2 dhe detyrën 2 mund të përfundojmë se çdo njësi matëse për vëllimin është 1000 herë më e madhe ose më e vogël se njësia matëse paraprake, në varësi nga ajo nëse lëvizim drejt një njësie më të madhe apo më të vogël.

Për shembull:

1 metër kub (1 m^3) = 1000 decimetra kub (1000 dm^3)

1 decimetër kub (1 dm^3) = 1000 centimetra kub (1000 cm^3)

1 centimetër kub (1 cm^3) = 1000 milimetra kub (1000 mm^3)

Kjo do të thotë se sa herë që kalojmë nga një njësi më e madhe në një njësi më të vogël të radhës për vëllimin, shumëzojmë numrin me 1000, kurse kur kalojmë nga një njësi më e vogël në një njësi më të madhe të radhës, pjesëtojmë me 1000.

Shembulli 3

Jepet një kub me vëllim 3 dm^3 .

- a) Shkruani vëllimin e kubit në cm^3 .
b) Shkruani vëllimin e kubit në m^3 .
c) Merrni një enë në formë kubi me vëllim 1 dm^3 dhe mbushni me ujë. Sa ujë mban ena?

Zgjidhje:

a) $3 \text{ dm}^3 = (3 \cdot 1000) \text{ cm}^3 = 3000 \text{ cm}^3$ $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

b) $3 \text{ dm}^3 = (3 : 1000) \text{ m}^3 = 0,003 \text{ m}^3$ $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$

- c) Nëse në një enë në formë kubi me vëllim 1 dm^3 derdh ujë dhe pastaj e kalon ujin në një matës (enë matëse për lëngje si në figurën djathtas), do të lexosh se ena mban 1 litër ujë.



$1 \text{ litër} = 1 \text{ dm}^3$

Siç e dini nga më herët, litri është njësi për vëllimin që përdoret për matjen e sasisë së lëngjeve dhe gazrave.

Nga $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$, fitohet $1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$.

Detyra 3

Një rezervuar ka vëllim prej 6 dm^3 . Sa litra ujë nxë ky rezervuar?

Detyra 4

Në një fabrikë për paketimin e ujit, një enë plastike përmban 3 m^3 ujë. Uji duhet të ndahet në enë plastike më të vogla, ku secila të mbajë 5 litra. Sa paketime me nga 5 litra do të nevojiten?

Udhëzime:

- Llogaritni sa dm^3 ka në 3 m^3 .
- Llogaritni sa litra ujë ka në 3 m^3 .
- Llogaritni sa paketime me nga 5 litra do të nevojiten për të shpërndarë tërë sasinë e ujit.

Detyra 5

Një akuarium i ri për peshq në kopshtin zoologjik ka formë kuadri me vëllim 1 m^3 .

- a) Llogaritni sa litra ujë do të nevojiten për ta mbushur akuariumin.
- b) Sa kontejnerë me kapacitet 20 litra do të nevojiten për ta mbushur tërë akuariumin?

Si mund t'i lidhni njësitë për vëllim (metra kub, decimetra kub, centimetra kub dhe litra) me shembuj nga jeta e përditshme? Cila është rëndësia e këtyre njësive për situata të ndryshme? Si i shndërroni metrat kub në litra? Cilat janë lidhjet e tjera dhe cila nga këto është më e lehtë për ju dhe pse?

Përgjigjuni pyetjeve në fletoren tuaj. Nëse përgjigjja është JO, kthehuni tek pjesa e leksionit që i referohet pyetjes.

1. A i kuptoj njësitë për vëllim dhe lidhjet mes tyre? Po / Jo
2. A arrita t'i zgjidh detyrat ku kërkohej të përdorja lidhjen mes metrave kub, decimetrave kub, centimetrave kub dhe litrave? Po / Jo
3. Çfarë ushtrimesh shtesë ose shembujsh do të doja të shihja për të përmirësuar kuptimin tim për vëllimin dhe lidhjen mes njësive të vëllimit? (Shkruaj një përgjigje të shkurtër)

Punë e pavarur

1. Shndërroni $12,5 \text{ m}^3$ në decimetra kub (dm^3).
2. Shndërroni 5000 dm^3 në litra (l).
3. Sa centimetra kub (cm^3) janë 2 dm^3 ?
4. Sa metra kub (m^3) janë 8000 litra ujë?
5. Në një fuçi ka 5 m^3 lëng. Sa litra lëng ka në fuçi?
6. Shndërroni $0,25 \text{ dm}^3$ në cm^3 .
7. Sa metra kub (m^3) ka 3000 cm^3 rërë?
8. Hulumtoni për konsumin mujor të ujit në familjen tuaj. Në çfarë njësie matet uji i konsumuar? Shndërroni në njësitë e tjera (p.sh. litra, kilolitra, metra kub).
9. Cili nga vëllimet e dhëna është më i madh: 1 dm^3 , 10 cm^3 , 100 cm^3 , 1000 mm^3 ?
10. Cili nga vëllimet e dhëna është më i vogël: 2 dm^3 , 300 cm^3 , 400 mm^3 , $0,4 \text{ m}^3$?
11. A mund të shkruhet vëllimi prej $6,000,000 \text{ cm}^3$ si $0,6 \text{ m}^3$? Shpjegoni përgjigjen tuaj.
12. Përdorni një nga shenjat $>$, $<$, $=$ për të krahasuar vëllimet:

a) $0,5 \text{ l}$ dhe $\frac{1}{2} \text{ dm}^3$	b) 340 cm^3 dhe 2 dm^3
c) 1500 cm^3 dhe 2 l	d) 820 dm^3 dhe $0,4 \text{ m}^3$

Vëllimi i kuadrit dhe kubit

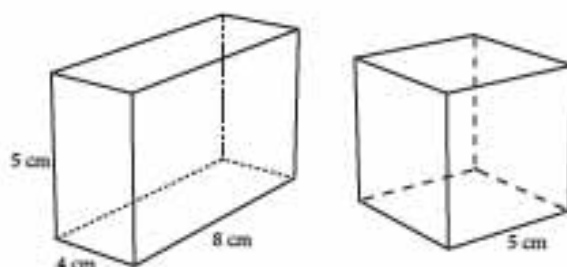
Në jetën e përditshme shpesh hasni forma 3D si kubi dhe paralelepipedin, kuadri. Ato janë të pranishme në shumë situata – nga vlerësimi i hapësirës që zë një kuti deri te llogaritja e sasisë së lëngut që mund të mbajë një rezervuar në formë kuadri. Për të kryer këto llogaritje me sukses, është e rëndësishme të kuptoni formulat bazë për vëllimin e kubit dhe kuadrit. Pikërisht kjo njësi mësimore do t'u ndihmojë të zotëroni këtë aftësi kyçe.



Shembulli 1

Në konkursin shkollor për përgatitjen e dhuratave, detyra jote është të përgatitësh paketime me biskota për shokët/shoqet. Biskotat duhet të vendosen në kuti të vogla që kanë formë kubi ose kuadri.

- Si do t'i përshkruaje format e këtyre kutive (çfarë është kubi dhe çfarë është kuadri)?
- Sa faqe dhe cilat forma 2D i ka secila nga kutitë?



Zgjidhje:

- Përdorni vizatimin dhe shpjegoni çfarë është kuadër dhe çfarë është kub?
- Kuadri dhe kubi kanë nga 6 faqe. Nga vizatimi shkruani cilat forma 2D ka kuadri, e cilat kubi?

Shembulli 2

Ekipi për organizimin e kabinetit shkollor dëshiron të bëjë kuti druri për materialet shkollore dhe çdo kuti të ketë formën e kuadrit ose kubit.

- Një kuti druri ka formë kuadri. Gjatësia e kutisë është 12 cm, gjerësia 8 cm dhe lartësia 5 cm.

Pyetje:

- Sa kube të vegjël me brinjë 1 cm mund të përmbajë ajo?
 - Nxirrni formulën për vëllimin e kuadrit duke përdorur gjatësinë, gjerësinë dhe lartësinë.
- Një kuti tjetër druri ka formë kubi me teh 6 cm. Nxirr formulën për vëllimin e kubit.

Zgjidhje:

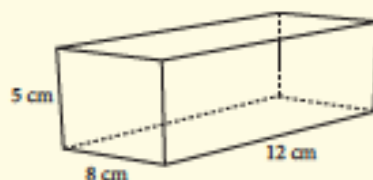
- Kutia e parë për materialet shkollore ka formë kuadri. Nëse çdo kub i vogël ka vëllim 1 cm^3 , numri i kubeve që mund të përfshihen në këtë kuadër është i barabartë me numrin matës të vëllimit të kuadrit.

Numri i kubeve që mund të renditen në bazën e kuadrit, sipas gjatësisë dhe gjerësisë, është $12 \cdot 8$ dhe, duke pasur 5 shtresa të tilla, kemi gjithsej $12 \cdot 8 \cdot 5 = 480$ kube me vëllim prej 1 cm^3 . Këto 480 kube mbushin kutinë me formë kuadri, që do të thotë se vëllimi i kuadrit është 480 cm^3 .

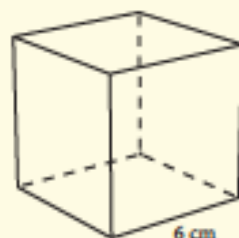
Pra, vëllimi i kuadrit = gjatësi-gjerësi-lartësi.

Nëse vëllimin, gjatësinë, gjerësinë dhe lartësinë e kuadrit i shënojmë me V , a , b , c përkatësisht, atëherë $V = a \cdot b \cdot c$.

$$V = 12 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 480 \text{ cm}^3.$$



- b) Për shkak se këtë herë kutia që duhet të bëhet është kub, ndërsa kubi është kuadër me dimensione të barabarta ($a = b = c$), në formulën për vëllimin e kuadrit, kur gjerësia dhe lartësia shënohen me a , ashtu si dhe gjatësia, fitojmë $V = a \cdot a \cdot a = a^3$. Duke qenë se tehu i kubit është $a = 6$ cm, marrim $V = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ cm³. Pra, vëllimi i kubit është 216 cm³. Kutia përmban 216 kube me vëllim 1 cm³.



Detyra 1

Pishina formë kuadri ka dimensionet 10 m, 5 m dhe 8 m. Sa litra ujë nxë kjo pishinë?

Detyra 2

Kthelhuni në shembullin 1 dhe përgjigjuni pyetjes në vijim: Cilën kuti do ta zgjidhinit, nëse do të donit që ajo të nxë më shumë biskota?

Shembulli 3

Ana ka blerë një kuti në formë të kuadrit për të pakeluar një dhuratë për shoqen e saj. Në kutinë shkruhej që gjatësia është 20 cm, gjerësia 10 cm, por lartësia nuk ishte e specifikuar. Ana e dinte që vëllimi i kutisë është 2000 cm³.

- Sa është lartësia e kutisë?
- Sa kube të vegjël me te 2 cm mund të përmbajë kjo kuti?

Zgjidhje:

- Vëllimi i kutisë llogaritet me formulën $V = a \cdot b \cdot c$. Nëse në formulë zëvendësoni vlerat e njohura për gjatësinë dhe gjerësinë e kutisë, do të fitoni $2000 = 20 \cdot 10 \cdot c$, $2000 = 200 \cdot c$, $c = \frac{2000}{200} = 10$. Pra, lartësia e kutisë është 10 cm.
- Vëllimi i një kubi llogaritet me $V = a^3$. Nëse vendosim $a = 2$ cm, atëherë: $V = (2 \text{ cm})^3 = 8 \text{ cm}^3$. Pra, vëllimi i një kubi është 8 cm³. Numri i kubeve me te 2 cm që mund të përmbajë kutia e madhe është: vëllimi i kutisë: vëllimi i një kubi = $2000 \text{ cm}^3 : 8 \text{ cm}^3 = 250$. Pra, kutia mund të përmbajë 250 kube të vogla.

Detyra 3

Biblioteka ka dollapë në formë të kuadrit me gjatësi 1,5 m, gjerësi 50 cm dhe lartësi 2 m. Pronari dëshiron të dijë:

- Sa është vëllimi i një dollapi?
- Nëse çdo libër zë një hapësirë prej 1500 cm³, sa libra mund të mbajë një dollap?

Nëse keni dy kuti me të njëjtin vëllim, a duhet domosdoshmërisht ato të kenë të njëjtat dimensione? Shpjegoni. Nëse e dyfishojmë gjatësinë e brinjës së një kubi, si do të ndryshojë vëllimi i tij? Si do të ndikojë ndryshimi i lartësisë së një kuadri në vëllimin e tij, nëse gjatësia dhe gjerësia nuk ndryshojnë?

Përgjigjuni në fletore dhe ndani përgjigjet me ndonjë shok/shoqe të klasës.

1. A je i/e sigurt për të kuptuarit e formulave për vëllimin e kubit dhe kuadrit?
2. Cilat detyra ishin më të lehta dhe cilat më të vështira për ty?
3. Në cilat aspekte duhet të përmirësohesh në llogaritjen e vëllimit të kuadrit dhe kubit?
4. Mendohu për situata të përditshme ku mund të aplikosh konceptin e vëllimit të kuadrit dhe kubit.

Punë e pavarur

1. Llogaritni vëllimin e kubit me tëh 15 cm.
2. Llogaritni vëllimin e kuadrit me brinjë 12 dm, 15 dm dhe 18 dm.
3. Ju duhet një kuti ku do t'i vendosni gjithë librat tuaj. Kutia është në formë kubi me brinjë 30 cm. Sa libra mund të vendosni në këtë kuti nëse dihet që një libër zë 400 cm^3 ?
4. Një rezervuar në formë kuadri ka brinjët 4 m, 3 m dhe 2 m. Sa litra ujë mund të mbajë?
5. Toni dëshiron të bëjë një kuti për të ruajtur veglat në kopshtin e tij. Kutia ka formë kuadri dhe baza e kutsë ka syprinë prej 4800 cm^2 . Llogaritni vëllimin e kutsë nëse gjerësia është 40 cm dhe lartësia 50 cm.
6. Magazina ka formë kuadri me gjatësi 3 m, gjerësi 2.5 m dhe lartësi 2 m.
 - a) Llogaritni vëllimin e magazinës.
 - b) Nëse në magazinë duhet të vendosen kuti në formë kubi me brinjë 50 cm, sa kuti mund të vendosen maksimalisht?
7. Një kamion është ngarkuar me dru për zjarr. Sa metra kub drurë ka në kamion nëse janë vendosur në formë kuadri me dimensionet 3 m, 4 m dhe 1.5 m?
- 8.* Në oborrin e Jovanit ka një rezervuar në formë kubi që përdoret për mbledhjen e ujrave të shiut. Ai mbledh 512 litra ujë.
 - a) Sa është gjatësia e brinjës së rezervuarit?
 - b) Nëse një ditë bie shi mjaftueshëm për të mbushur rezervuarin deri në gjysmën e tij, sa vëllim uji (në litra) do të ketë rezervuari?

Njehsimi i syprinës së kubit dhe kuadrit nga rrjetet e tyre

Në jetën e përditshme shpesh hasni në objekte me formë kubi ose kuadri, si kutitë e dhuratave, mobiljet dhe paketimet e ndryshme. Për të ditur sa material është i nevojshëm për të prodhuar një objekt të tillë ose për ta mbuluar, për shembull me pëlhurë, duhet të llogaritni syprinën e sipërfaqes së tij të përgjithshme.



Në këtë njësi mësimore do të mësoni si të përdorni rrjetet e kubit dhe të kuadrit për të llogaritur syprinën e tyre. Do të shqyrtoni shembuj nga jeta reale dhe do të mësoni si të aplikoni formula për syprinën e përgjithshme në kontekste të ndryshme. Kjo njohuri do t'u ndihmojë të kuptoni dhe zgjidhni probleme praktike lidhur me dizajnin, paketimin dhe prodhimin.

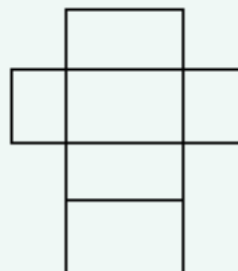
Shembulli 1

Maria punon modele të kutive për dhurata. Ajo përdor fletë letre për të bërë rrjetën e zhvilluar të kuadrit. Një nga kutitë që ka bërë ka gjatësi 8 cm, gjerësi 5 cm dhe lartësi 4 cm. Maria e zhvillon kutinë në një rrjet dhe fiton 6 drejtkëndësha. Ajo dëshiron të kontrollojë nëse rrjeta është e saktë dhe nëse mund të ndërtojë kutinë.

- Sa drejtkëndësha me dimensione 8 cm dhe 5 cm përmban rrjeta?
- Sa drejtkëndësha me dimensione 8 cm dhe 4 cm përmban rrjeta?
- Sa drejtkëndësha me dimensione 5 cm dhe 4 cm përmban rrjeta?
- Kontrolloni nëse të gjithë këta drejtkëndësha janë të mjaftueshëm për të ndërtuar kutinë (kuadrin) dhe vizatoni rrjetën.

Zgjidhje:

- Ka 2 drejtkëndësha me dimensione 8 cm dhe 5 cm. Këta drejtkëndësha janë dy faqet e mëdha të kuadrit.
- Ka 2 drejtkëndësha me dimensione 8 cm dhe 4 cm. Këta drejtkëndësha janë dy faqet më të gjata dhe më të ngushta të kuadrit.
- Ka 2 drejtkëndësha me dimensione 5 cm dhe 4 cm. Këta drejtkëndësha janë dy faqet më të vogla të kuadrit.
- Rrjeta e kuadrit ka gjithsej 6 drejtkëndësha. Numri dhe dimensionet e drejtkëndësive janë të sakta për të ndërtuar kuadrin.

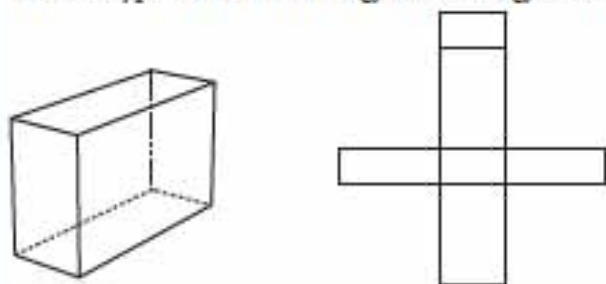


Detyra 1

Gjeni dhe matni dimensionet e ndonjë objekti në mësonjëtoqe që ka formën e kubit (për shembull, kuti, libër, ...) Vizatoni rrjetin e tij.

Shembulli 2

Sa është syprina e kuadrit me gjatësi 4 cm, gjerësi 3 cm dhe lartësi 2 cm?



Zgjidhje:

Ne kemi kuadër me gjatësi 4 cm, gjerësi 3 cm dhe lartësi 2 cm. Syprina e secilës faqe është:

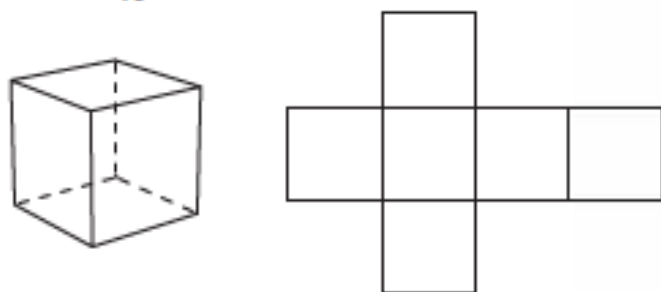
$$a \cdot b = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2, a \cdot c = 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2, b \cdot c = 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2.$$

Pasi kemi nga dy prej secilit drejtkëndësh, syprina e përgjithshme është: $2 \cdot (12 + 8 + 6) = 2 \cdot 26 = 52 \text{ cm}^2$.

Formula për syprinën e kuadrit të çfarëdoshëm jepet me $S = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Shembulli 3

Sa është syprina e kubit me teh 3 cm?



Zgjidhje:

Nga rrjeti shihet se kubi ka gjashtë faqe të barabarta. Secila faqe është katror me brinjë 3 cm.

Syprina e secilës faqe është $3^2 = 9 \text{ cm}^2$. Syprina e përgjithshme e kubit është $6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$.

Pse?

Formula për syprinën e kubit të çfarëdoshëm jepet me $S = 6a^2$

Detyra 2

Vizatoni rrjetin e kuadrit me gjatësi 5 cm, gjerësi 3 cm dhe lartësi 4 cm. Më pas, duke e shfrytëzuar rrjetin e kuadrit, njehsoni syprinën e tij.

Detyra 3

Vizatoni rrjetin e kubit me teh 5 cm. Më pas, duke e shfrytëzuar rrjetin e kubit, njehsoni syprinën e tij.

Shembulli 4

Martini dëshiron të lyej me bojë magazinën ku ruan veglat. Magazina ka formën e një kuadri me gjatësi 6 m, gjerësi 4 m dhe lartësi 3 m.

- Sa është syprina e përgjithshme e të gjitha mureve të magazinës?
- Nëse dëshiron të lyej vetëm tre nga muret, llogaritni syprinën e përgjithshme të tyre.
- Sa është syprina e përgjithshme e dyshemesë dhe tavanit së bashku?

Zgjidhje:

- a) Llogaritja e syprinës së përgjithshme të të gjitha mureve:

$$S = 2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot 54 = 108 \text{ m}^2$$

- b) Llogaritja për lyerjen me bojë të tre mureve:

(për shembull, dy me dimensione 6 m me 3 m dhe një me dimensionet 4 m me 3 m):

$$S = 18 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2 + 12 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2.$$

- c) Llogaritja e syprinës së përgjithshme të dyshemesë dhe tavanit::

$$S = S_D + S_T = 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$$

Detyra 4

Davidi dëshiron të lyej me bojë të gjitha muret e magazinës, por jo tavanin dhe dyshemenë.

Prodhuesi i bojës thotë se 1 litër bojë mund të mbulojë 5 m^2 . (Përdor dimensionet e magazinës nga shembulli 4)

- Sa litra bojë do t'i nevojiten për të lyer të gjitha muret e magazinës?
- Nëse çdo kovë ka 10 litra bojë, sa kova bojë duhet të blejë David?

Nëse e dyfishojmë gjatësinë e tehut të kubit, çfarë do të ndodhë me syprinën e mbështjellësit të tij? Si mund të të ndihmojë rrjeti i paralelopipedit, kuadrit, për të llogaritur më shpejt syprinën e tij?

Vlerëso njohuritë e tua për syprinën e kuadrit dhe kubit. Kthehu përsëri te pjesët e mësimi për të cilat nuk je i sigurt për njohuritë e tua.

Vlerësim: 5 – Mund të identifikoj vetë brinjët, të bëj rrjetin dhe të llogaris saktë syprinën e përgjithshme të kuadrit dhe kubit.

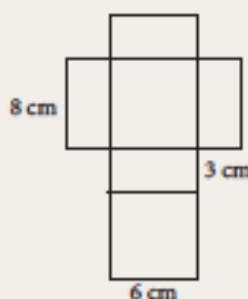
Vlerësim: 3-4 – Ndonjëherë më duhet ndihmë për të vizatuar rrjetin e kuadrit dhe kubit dhe për të bërë llogaritje të sakta të syprinës.

Vlerësim: 1-2 – Kam vështirësi në lidhjen e të dhënave dhe përdorimin e formulave. Më nevojitet ndihmë shtesë dhe ushtrime për të kuptuar dhe aplikuar plotësisht konceptet.

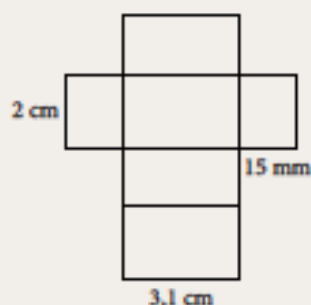
Punë e pavarur

1. Njehsoni syprinën e kuadrit ose kubit nga rrjetet e dhëna:

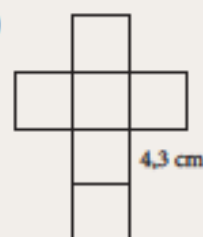
a)



b)



c)



- Syprina e përgjithshme e kubit është 150 cm^2 . Sa është tehu i kubit?
- E dimë që një faqe e kubit ka syprinë 64 cm^2 . Llogaritni syprinën e përgjithshme të kubit.
- Baza e kuadrit është drejtkëndësh me syprinë 120 cm^2 . Gjerësia e bazës është 6 cm, ndërsa lartësia e kuadrit është 10 cm. Llogaritni syprinën e kuadrit.
- Baza e kuadrit është katror me brinjë 8 cm. Lartësia e kuadrit është 1 cm. Llogaritni syprinën e përgjithshme të kuadrit.

6. Syprina e një muri të kubit është 36 cm^2 . Llogaritni gjatësinë e tehut të kubit dhe syprinën e përgjithshme të kubit.
7. Syprina e bazës së kuadrit është 54 cm^2 , ndërsa gjerësia e bazës është 9 cm .
 - a) Llogaritni gjatësinë e bazës.
 - b) Nëse lartësia e kuadrit është 10 cm , llogaritni syprinën e tij.
8. Kubi ka vëllim 343 cm^3 . Njehsoni syprinën e kubit.
- *9. Kuadri ka: bazë me syprinë 50 cm^2 , mur frontal me syprinë 70 cm^2 dhe lartësi 7 cm . Sa është syprina e përgjithshme e kuadrit?
- *10. Syprina e një muri anësor të kuadrit është 60 cm^2 . Dihet se lartësia e kuadrit është 8 cm dhe baza është katror. Llogaritni brinjët e bazës dhe syprinën e përgjithshme të kuadrit.
11. Dhoma e Dejanit është kuadër me mure anësore prej 7.5 m^2 dhe 10.5 m^2 .
 - a) Sa është syprina e dyshemesë nëse syprina e përgjithshme e dhomës është 56 m^2 ?
 - b) Nëse për një metër katror të dyshemesë duhen 10 pllaka, sa pllaka i duhen për gjithë dyshemenë?
 - c) Për një metër katror duhen 0.5 litra bojë. Sa litra bojë i duhen për tavanin?
12. Familja Petrovski ka blerë një akuarium në formë kubi për peshqit e tyre. Në etiketë shkruan që syprina e përgjithshme e akuariumit është 720 cm^2 . Përcaktoni gjatësinë e brinjës së kubit dhe llogaritni sa litra ujë mban akuariumi.
13. Emilia dëshiron të bëjë një kuti në formë kubi për dhuratë. Ajo përdor karton dhe dëshiron që syprina e përgjithshme e kutisë të jetë 600 cm^2 . Përcaktoni gjatësinë e brinjës së kubit dhe llogaritni vëllimin e kutisë.

TEMA
5

PUNA ME TË DHËNA



Në përditshmërinë tonë gjithmonë jemi të rrethuar me të dhëna: sa nxënës ka në shkollë, sa kohë kalojmë për të mësuar, sa ditë me diell kishte muaji, rezultatet nga garat sportive, sa herë kemi vizituar bibliotekën. Kur i përmbledhim, i rregullojmë dhe i tregojmë këto informacione, në të vërtetë punojmë me të dhëna.

Puna me të dhëna nuk është vetëm matematikë – është shkathtësi e fuqishme që na mundëson të mendojmë logjikisht, të sjellim vendime dhe të japim shpjegime për idetë tona ndaj të tjerëve.

**“Matematika është mbretëresha e shkencave,
kurse statistika është shërbëtore e saj”**

Rezultatet e mësimit

Pas shtjellimit të kësaj teme do të jeni të aftë të:

- përzgjidhni mënyrën e mbledhjes, organizimit dhe paraqitjes së të dhënave diskrete, sipas nevojës edhe të grupuara në intervale të barabarta;
- interpretoni të dhënat e paraqitura me diagrame dhe sillni përfundime sipas modës ose klasës modale për të dhënat e grupuara, medianës dhe rangut;
- përdorni gjuhën e probabilitetit për të përshkruar dhe interpretuar ngjarjet

Planifikimi i hulumtimit

Në përditshmëri shpesh përballemi me situata kur duhet të sjellim përfundime në bazë të të dhënave. Për shembull, kur planifikojmë një piknik familjar, duhet të grumbullojmë të dhëna për motin, destinacionet e njohura, akomodimin, si dhe mendimet e anëtarëve të familjes. Ngjashëm me këtë në shkencë dhe punë, planifikimi i hulumtimit është bazë për marrjen e rezultateve të sakta dhe të dobishme. Me këtë njësi mësimore do të mësoni të bëni plan për hulumtim, të përpiloni dhe të përdorni instrumente për mbledhjen e të dhënave, si për shembull anketat, pyetësorët dhe matjet.



Shembulli 1

Nxënësit e klasës suaj dëshirojnë të dinë se çfarë frutash më së shumti parapëlqejnë nxënësit e shkollës. Planifikoni hulumtimin dhe përgjigjuni në pyetjet në vijim:

- Cilën mënyrë do ta përdorni për grumbullimin e të dhënave: anketimin, intervistat, vrojtimet e të ngjashme? Shpjegoni pse u përcaktuat për ndonjërin prej mënyrave të mbledhjes së të dhënave.
- Përpiloni 3 pyetje për anketimin ose instrument tjetër.
- Përmbledhni të dhënat nga 10 pjesëmarrës të klasës suaj dhe shfaqni të dhënat në tabelë

Zgjidhje:

- Mund të shfrytëzoni anketën si mënyrë të shpejtë dhe efikase për grumbullimin e mendimeve të më shumë nxënësve.
Anketa është e lehtë për përpilim, kurse përgjigjet mund të analizohen dhe paraqiten përmes tabelës ose diagramit.
- Pyetje për anketim:
 - Cili është fruti yt i preferuar?
A) mollët, B) bananet, C) portokajtë, Ç) tjetër _____
 - Sa shpesh konsumoni fruta?
A) Çdo ditë.
B) Disa herë në javë.
C) Një herë në javë.
Ç) Rrallë herë.
 - A do të dëshironit që në byfenë shkollore të ketë më shumë fruta?
A) Po, B) Jo

c) Përgjigjet sipas pyetjeve nga 10 nxënës

Tabela - frutat e parapëlqyera të nxënësve

Nxënësit	Pyetjet		
	Cili është fruti yt i preferuar?	Sa shpesh han fruta?	A do të dëshironit më shumë fruta në bufe?
1	Mollët	Çdo ditë	Po
2	Bananet	Disa herë në javë	Po
3	Portokajtë	Çdo ditë	Jo
4	Tjetër (rrush)	Disa herë në javë	Po
5	Bananet	Çdo ditë	Jo
6	Mollët	Një herë në javë	Po
7	Mollët	Çdo ditë	Jo
8	Portokajtë	Rrallë herë	Po
9	Bananet	Çdo ditë	Jo
10	Tjetër (kivi)	Një herë në javë	Po

Përzgjidhni diagramin dhe paraqitni të dhënat për frutat e preferuara dhe cilat fruta më shumë konsumohen?

Detyra 1

Zbuloni cili është aktiviteti i parapëlqyer i shokëve të klasës gjatë kohës së pushimeve.

- Si do të fillonit hulumtimin?
- Cilat të dhëna të duhen?
- Si do t'i grumbullonit të dhënat?

Hulumtimi është proces i parashtrimit të pyetjeve, grumbullimit të të dhënave, analizës së tyre dhe sjelljes së vendimeve për problemin ose temën përkatëse. Është mënyrë e zbulimit të informacioneve të reja ose zgjidhjes së problemeve të caktuara përmes punës së organizuar.

Hulumtimi u ndihmon të mësoni diçka të re, më mirë t'i kuptoni njerëzit dhe rrethanat përreth dhe të sillni vendime bazuar në informacione.

Shembulli 2

Shkolla juaj mendon të organizojë një aktivitet të ri jashtë mësimin, por dëshiron të dijë se çfarë do të ishte më interesante për nxënësit. Ty të është besuar detyra e realizimit të një hulumtimi përmes të cilit do të zbulosh se cilin aktivitet më shumë do ta pëlqenin nxënësit. Detyra jote është të bësh një plan për hulumtimin, të përpilosh instrumentin për grumbullimin e të dhënave dhe t'i marrësh informacionet nga nxënësit.

Zgjidhje:

Që të përpiloni një plan për hulumtim, ndiqni hapat më poshtë dhe në fletore shënoni se ç' dëshironi të hulumtoni.

Hapat e hulumtimit:

1. Identifikimi i problemit ose pyetjes:
 - Fillimisht duhet vendosur çfarë dëshironi saktësisht të zbuloni ose hulumtoni. Shembull: "Cilat janë aktivitetet e lira më të shpeshta të nxënësve të shkollës sonë"
2. Planifikimi i hulumtimit:
 - Mendoni për mënyrën e grumbullimit të të dhënave (anketë, intervistë, vërtetim).
 - Vendosni cilat vegla, mjete, do të përdorni (pyetësor, anketë, tabelë).
 - Caktoni kënd do të përfshihni në hulumtim (për shembull, nxënësit nga klasa jote).
3. Grumbullimi i të dhënave:
 - Këtu mund të realizoni anketë ose intervistë, të vërtetoni situata ose të mbledhni informacione nga libra dhe interneti. Për shembull: Realizoni anketë me pyetje si: "Cili është hobi yt" ose "Sa kohë ndan për hobin tënd"
4. Selektimi dhe organizimi i të dhënave:
 - Radhiti të dhënat në tabela, diagrame ose lista për analizim më të lehtë. Në këtë shembull paraqitni në diagram sa nxënës kanë përzgjedhur secilin hob.
5. Analiza e të dhënave:
 - Mendoni se çfarë ju tregojnë të dhënat e grumbulluara.
 - Krahasoni përgjigjet e ndryshme dhe mundohuni t'i lidhni informacionet. Për shembull, nëse 60% e nxënësve kanë përzgjedhur për hob sportet, kjo mund të nënkuptojë se sportet janë hobi më i preferuar.
6. Sjellja e përfundimeve:
 - Shkruani se çfarë keni mësuar nga hulumtimi.
 - Përgjigjuni pyetjes së vendosur qysh në fillim. Për shembull: "Hob më i shpeshtë i nxënësve është sporti, e më pas janë muzika dhe artet tjera"
7. Prezantimi i rezultateve:
 - Përpilo një parashtrësë me shkrim ose prezantim për të ndarë rezultatet me të tjerët. Për shembull: Shfrytëzoni tabela, diagrame dhe tekste të shkurta për të shpjeguar rezultatet.



Identifikimi i
problemit



Planifikimi i
hulumtimit



Grumbullimi
i të dhënave



Organizimi i
të dhënave



Analiza e të
dhënave



Sjellja e
përfundimeve

Detyra 2

Problem për hulumtim: Si ndikojnë në rritjen e bimëve faktorë të ndryshëm të mjedisit jetësor?

Në klasën e shtatë mësoni për mjedisin jetësor, ekosistemet dhe faktorët që ndikojnë në organizmat e gjallë. Hulumtimi juaj le të përqendrohet në atë se si në rritjen e bimëve ndikojnë faktorët sikurse është drita, uji, temperatura dhe dheu. Bëni planin për hulumtim.

Për hulumtimin që keni realizuar mendoni dhe përgjigjuni pyetjeve: A ishte qartë i përkufizuar qëllimi i hulumtimit? Sa ishte efikase, në grumbullimin e të dhënave, metoda e përzgjedhur? Çfarë do të bënit ndryshe radhën tjetër?

Sipas kriterëve të mëposhtëm, vlerësoni veten:

- Plan që është i qartë dhe i lehtë të ndiqet (1 – 5).
- Kreativitet gjatë përzgjedhjes së instrumentit (1 – 5).
- Zbatueshmëria e rezultateve të hulumtimit (1 – 5).

Punë e pavarur

Përzgjidhni lëndën dhe problemin për të cilin do të hulumtoni.

1. Biologji

- Si ndikojnë në rritjen e bimëve llojet e ndryshme të dheut?
- Gjatë aktiviteteve sportive, cili lloj ushqimi jep më shumë energji?
- Si ndikon ndotja ajrore cilësinë e ujit në lumenjtë lokalë?

2. Kimi

- Cila pije shkakton ndryshim më të madh në pH vlerën e dhëmbëve?
- Si ndikojnë në tretjen e sheqerit tretësit e ndryshëm?
- A janë efikase po aq sa edhe mjetet pastruese komerciale ato shtëpiake?

3. Fizikë

- Materialet e ndryshme, nga të cilët janë ndërtuar enët, a ndikojnë në izolimin termik të ujit në to?
- Si ndikon shtroja mbi shpejtësinë e lëvizjes së trupit mbi të?
- Cili lloj letre ofron ndërtimin e maketës së avionit që bën rrugë më të gjatë?

4. Gjeografi

- Si ndikojnë ndryshimet klimatike në stinët e vitit në rajonin tënd?
- Si ndikojnë llojet e ndryshme të relievit në temperaturat në vendet përreth?
- Cilat janë burimet më të zakonshme natyrore në rrethinën tënde dhe si përdoren ato?

5. Histori

- Si ndryshojnë kushtet e jetesës në epoka të ndryshme (p.sh., mesjeta dhe koha moderne)?
- Si ka ndikuar zhvillimi i teknologjisë në komunikimin në të kaluarën?
- Cilat ngjarje historike kanë pasur ndikimin më të madh në komunitetin lokal?

6. Edukim teknik

- Cili nga materialet e drurit, plastikës apo letrës është më i rekomanduari për përpunim në lëndën e edukimit teknik?
- Si mund të përdoren panelet diellore për të ulur konsumimin e energjisë elektrike?
- Cilat janë përparësitë dhe të metat e llojeve të ndryshme të burimeve të rinovueshme të energjisë?

7. Matematikë

- Si ndryshon temperatura mesatare ditore gjatë një muaji në rajone të ndryshme?
- Cilat koncepte matematikore janë më të pranishme në jetën e përditshme?
- Si përdoren format gjeometrike në arkitekturën e ndërtesave lokale?

8. Informatikë

- Si mund të rritet siguria e nxënësve në internet?
- A e ndryshojnë cilësinë e imazheve llojet e ndryshme të skedarëve (JPEG, PNG)?
- Si mund të përdoren softuerët për përpunimin e të dhënave për të analizuar anketat?

Grumbullimi dhe organizimi i të dhënave për hulumtim

A jeni munduar ndonjëherë të ndërtoni tabelë me emrat e aktiviteteve të parapëlqyera të shokëve tuaj? Grumbullimi i të dhënave është hapi i parë drejt fitimit të informacioneve që mund të analizoni dhe të sillni përfundime. Në këtë njësi mësimore do të rikujtoni si të grumbulloni dhe organizoni të dhënat në mënyrën që është thelbësore në procesin hulumtues.



Shembulli 1

Nxënësit e klasës së gjashtë kanë bërë një anketë për të zbuluar sa orë shokët e klasës kalojnë në ndjekjen e emisioneve televizive. Të dhënat që i kanë grumbulluar janë me sa vijojnë (tregojnë sasinë në orë): 1, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 2, 1, 3, 4.

Ndihmoni të organizojnë të dhënat në tabelën e frekuencës (shpeshtësisë).

Zgjidhje:

Hapi 1: Grupimi i të dhënave

Fillimisht, i identifikojmë gjitha vlerat e ndryshme të fituara (1, 2, 3, 4 orë).

Hapi 2: Numërimi i frekuencave (shpeshtësive)

Numërohet sa herë paraqitet secila vlerë në të dhënat:

1 orë: 4 herë; 2 orë: 6 herë; 3 orë: 6 herë dhe 4 orë: 4 herë

Ose mund të gruponi të dhënat edhe në këtë mënyrë: 1 orë: ///; 2 orë: ####; 3 orë: ### / dhe 4 orë: ///

Hapi 3: Plotësimi i tabelës

Tabela e frekuencave duket si në vijim:

Orët e kaluara në ndjekjen e TV

Numri i orëve (h)	Frekuenca (f)
1	4
2	6
3	6
4	4

Hapi 4: Analiza e tabelës

- Numri më i madh i nxënësve, (6), ndjekin emisione televizive 2 ose 3 orë në ditë.
- Numri më i vogël i nxënësve, (4) ndjekin emisione televizive 1 ose 4 orë në ditë.

Detyra 1

Nxënësit e një shkolle janë anketuar për vendin ku ushqehen gjatë kohës sa janë në shkollë.

- a) Në fletore plotësoni tabelën.
b) Në cilën mënyrë ushqehen më shumë nxënësit?
c) Bëni krahasime të tjera.

Vendi ku ushqehen nxënësit

Mënyra e të ushqyerit	Simboli	Numri i nxënësve
Në kuzhinën e shkollës	### ### ### ### #	
Fast food afër shkollës	### ### ### ### /	
Ushqim i marrë nga shtëpia	### ### ### ///	
Nuk ushqehen	### ### †	
Gjithsej		

Shembulli 2

Në bibliotekën shkollore, nxënësit dëshironin të dinin se sa libra lexojnë shokët e klasës gjatë një muaji. Grumbulluan të dhëna për 30 nxënës për të cilët fituan numrat në vijim të librave të lexuar: 7, 3, 5, 4, 2, 6, 8, 7, 3, 5, 5, 10, 2, 4, 6, 7, 1, 8, 4, 5, 3, 6, 7, 9, 6, 3, 2, 6, 5, 4.

Gjatë grumbullimit të këtyre vlerave, është bërë numërimi i librave të lexuar. Për këtë lloj të dhënash themi se janë të dhëna diskrete. Të dhënat diskrete janë të dhëna që mund të marrin vetëm vlera të caktuara, të numërueshme (për shembull, numri i librave, traktorëve, karrigave).

- a) Gruponi të dhënat në intervale (për shembull, 1-2, 3-4, 5-6, e kështu me radhë). Rikujtoni: Ç'është intervali?
b) Bëni tabelën e frekuencave e cila i tregon intervalet dhe sa nxënës i takojnë secilit interval.
c) Analizoni tabelën dhe përgjigjuni: Në cilin interval ka më shumë nxënës? Në cilin interval ka më pak nxënës?

Zgjidhje:

Hapi 1: Grupimi i të dhënave në intervale

I organizojmë vlerat e fituara në grupe me nga 2 sipas numrit të librave të lexuar: 1-2 libra; 3-4 libra; 5-6 libra; 7-8 libra dhe 9-10 libra.

Pse është e dobishme t'i grupojmë të dhënat në intervale?

- Për të shmangur tabela të paqarta me shumë rreshta për secilën vlerë, të dhënat mund t'i grupojmë në intervale.
- Kur kemi numër të madh të dhënash, grupimi i thjeshton dhe organizon informacionet për analizim sa më të lehtë.
- Me intervale më lehtë mund të analizojmë se cili intervali i vlerave është më i shpeshtë (ka frekuencë më të madhe) dhe si janë të shpërndara të dhënat.

Hapi 2: Numërimi i frekuencave në secilin interval

1-2: 4 nxënës; 3-4: 8 nxënës; 5-6: 10 nxënës; 7-8: 6 nxënës; 9-10: 2 nxënës

Hapi 3: Tabela e frekuencave

Numri i librave të lexuar gjatë 1 muaji

Intervali (numri i librave)	Frekuenca (numri i nxënësve)
1 - 2	4
3 - 4	8
5 - 6	10
7 - 8	6
9 - 10	2
Gjithsej	30

Hapi 4: Analiza e tabelës

Më shumë nxënës (10) i takojnë intervalit 5-6 libra, pra numri më i madh i nxënësve kanë lexuar 5 ose 6 libra.

Më pak nxënës (2) i takojnë intervalit 9-10 libra.

Grupimi i të dhënave gjithmonë bëhet në intervale me gjatësi të njëjta.

Detyra 2

Nxënësit hulumtojnë sa kohë harxhojnë shokët e klasës rrugës për të arritur në shkollë. Ata realizuan anketën dhe fituan përgjigjet vijuese (në minuta):

2, 23, 14, 18, 36, 21, 3, 7, 10, 15, 26, 24, 3, 16, 28, 9, 14, 32, 10, 22, 17, 5, 11, 6, 15, 8, 9, 17, 20, 16, 7, 30.

- Gruponi të dhënat në intervale me gjerësi 10 minuta dhe krijoni tabelën e frekuencës për numrin e nxënësve që i takojnë secilit prej intervaleve.
- Duke e shfrytëzuar tabelën, përgjigjuni: Cili interval kohor është më i shpeshtë (këtu bie numri më i madh i nxënësve)? Cili interval kohor është më pak i përfaqësuar?
- Mendoni dhe propozoni dy arsye pse nxënësit bëjnë rrugë në intervale të ndryshme kohore deri te shkolla.

Si ndihmon, në nxjerrjen e informacioneve të rëndësishme për të dhënat, grupimi i tyre në intervale? Mendoni, a ka mënyra tjera për grumbullimin e të dhënave përveçse me numërim? Jepni shembuj të dhënash që mund të fitohen me matje përmes ndonjë instrumenti matës.

Në fletore, përgjigjuni pyetjeve dhe ndani me ndonjë shok/shoqe të klasës

1. A i organizova siç duhet të dhënat dhe a i grupova në intervalet përkatëse?
 - a) Po, e krijova saktë tabelën dhe i grupova të dhënat në intervalet përkatëse.
 - b) E fillova krijimin e tabelës, por nuk i zgjodha intervalet më të përshtatshme.
 - c) Nuk arrita të krijoj një tabelë të saktë të frekuencës.
2. A e kuptoj procesin e përzgjedhjes së intervaleve dhe se si ato ndikojnë në analizën e të dhënave?
 - a) Po, e kuptoj pse është e rëndësishme të zgjedh intervalet e duhura për të dhënat dhe si ato ndikojnë në rezultatet.
 - b) U përpoqa të zgjedh intervale, por kisha vështirësi në përcaktimin e gjatësisë më të mirë, më optimale të intervalit.
 - c) Nuk e kuptova pse dhe si t'i grupoj të dhënat në intervale.
3. A mund ta analizoj tabelën dhe të nxjerr informacione të rëndësishme nga të dhënat?
 - a) Po, mund ta analizoj tabelën dhe të nxjerr informacione të dobishme (si intervalet më të shpeshta, shpërndarja e të dhënave).
 - b) Mund t'i analizoj të dhënat, por jo gjithmonë në mënyrë të saktë.
 - c) Nuk mund të nxjerr informacione të rëndësishme nga tabela.

Punë e pavarur

1. Në një fermë kafshësh të një lloji të caktuar janë matur 120 prej tyre dhe janë fituar të dhënat e mëposhtme në kilogramë:

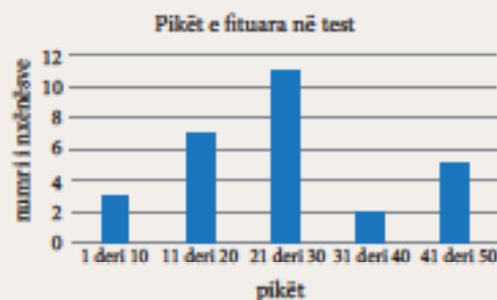
86	90	90	92	90	93	90	91	91	86	86	86	86	87	87
92	93	90	87	90	88	90	93	87	88	93	90	91	88	89
93	88	86	90	89	88	89	91	88	85	91	92	92	90	90
93	91	85	92	85	85	91	92	89	87	89	92	90	87	90
92	85	92	91	86	90	86	93	87	91	87	85	87	89	87
85	90	89	88	90	87	88	86	88	91	91	93	86	87	91
88	90	88	90	91	93	89	91	89	90	87	91	92	92	91
84	85	92	84	86	88	93	90	89	87	84	92	90	87	92

- a) Gruponi të dhënat në intervale me gjatësi 5 kilogramë dhe krijoni tabelën e frekuencave për numrin e kafshëve në secilin interval.
- b) Duke shfrytëzuar tabelën, përgjigjuni: Cili interval ka më shumë kafshë dhe e sata pjesë e gjitha kafshëve i takon atij intervali? Cili interval ka më pak kafshë dhe e sata pjesë e gjithë numrit të kafshëve i takon atij intervali?
- c) Sill edhe përfundime tjera.

2. Është dhënë lartësia e 52 nxënësve në centimetra:

153	145	156	154	153	157	155	145	146	153	158	146	158
148	151	159	157	146	154	159	147	153	154	157	146	148
147	159	159	152	148	153	159	155	148	148	158	148	157
151	147	154	153	146	152	148	157	153	146	155	146	153

- a) Gruponi të dhënat.
 b) Në cilin interval ka më shumë nxënës, e në cilin më pak?
 c) Numrin e nxënësve, të secilit interval, shkruaje në përqindje.
3. Të dhënat nga diagrami i dhënë frekuencor paraqitni me tabelën frekuencore për të dhënat e grupuara.



4. Jepen të dhënat për moshën e njerëzve të autobusit urban.

2	11	21	79	32	42	63	51	59	43
55	63	13	50	22	57	25	29	32	58
38	45	51	67	16	61	43	57	60	51
8	55	37	59	35	56	59	33	28	30
40	53	49	74	18	48	19	26	78	62

- a) Paraqitni me tabelë frekuencore përmes grumbullimit të të dhënave.
 b) Duke e përdorur tabelën, përgjigjuni: Cila grup-moshë është më e përfaqësuar në trafikun urban, e cila më pak?
 c) Sipas jush, cila mund të ishte arsyeja që në trafikun urban pikërisht kjo grup-moshë është më e pranishme?

Diagrami me shtylla dhe ai rrethor

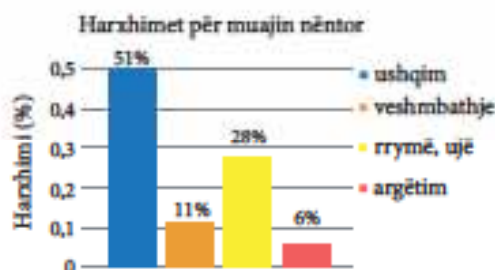
Diagramet janë një mjet i rëndësishëm për paraqitjen e të dhënave të mbledhura sepse mundësojnë pamje më të mirë dhe më shumë qartësi. Gjatë vizatimit të diagrameve përdoren vija, forma gjeometrike, figura dhe elemente të tjera për të paraqitur të dhënat në një mënyrë të kuptueshme. Qëllimi që duhet të arrihet me secilin diagram është që ai të jetë i thjeshtë dhe i qartë për të gjithë të interesuarit e problemit përkatës që është hulumtuar. Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si t'i shfaqni të dhënat në mënyrë të thjeshtë, tërheqëse në pamje, me anë të diagramit me shtylla dhe rrethor, e më pas t'i analizoni dhe përdorni sipas nevojës ose kërkesave.



Shembulli 1

Në diagramin me shtylla është prezantuar se si një familje e kishte shpërndarë fitimin e saj në muajin nëntor 2024.

- Sipas diagramit me shtylla, familja në nëntor 2024, për çka harxhoi më shumë e për çka më pak?
- A mund të përfundojmë se kjo familje kishte kursyer në muajin nëntor 2024? Shpjegoni përgjigjen tuaj.



Zgjidhje:

- Sipas diagramit me shtylla, familja në muajin nëntor 2024 më shumë ka harxhuar për ushqim, e më pak për argëtim.
- Sipas diagramit, harxhimet e përgjithshme janë $51 + 11 + 28 + 6 = 96\%$, që do të thotë se në muajin nëntor 2024 kjo familje kishte kursyer 4% të fitimit të saj të përgjithshëm.

Detyra 1

- Në vitin 2023, cila kafshë e egër është gjuajtur më shumë?
- Bëni edhe krahasime të tjera.
- Çfarë llojesh të tjera kafshësh të egra ka në territorin e Republikës së Maqedonisë së Veriut?

Kafshët e egra të gjuajtura vitin 2023



Shembulli 2

Në një paralele të klasës së shtatë ka 36 nxënës, nga të cilët 17 janë vajza, kurse 19 janë djem.

Paraqitni të dhënat me diagram rrethor.

Zgjidhje:

Sipas të dhënave, në këtë shembull ka dy kategori: djem dhe vajza. Pra, diagrami rrethor do të ndahet në dy pjesë (sektorë). Për të caktuar madhësinë e secilit sektor, fillimisht e përcaktojmë madhësinë e këndit që do të përfaqëson një nxënës. Këndi i plotë i rrethit është 360° . Këtë e pjesëtojmë me numrin e përgjithshëm të nxënësve, 36, për të cilët përgatitet diagrami rrethor. Kështu caktojmë sa është këndi qendror që i përgjigjet 1 nxënësi, pra $360^\circ : 36 = 10^\circ$. Pjesët e diagramit rrethor të kërkuar do të kenë këndet në vijim:

- Për vajza $17 \cdot 10^\circ = 170^\circ$,
- Për djem $19 \cdot 10^\circ = 190^\circ$.

Këndet e fituara qendrore i vizatojmë në rreth me rreze sipas dëshirës, shkruajmë titullin e diagramit dhe legjendën që tregon se si janë shënuar të dhënat e paraqitura.

Përbërja e paraleles



Shembulli 3

Në tabelën 1 është dhënë shpërndarja e parave të lotarisë. Paraqitni të dhënat në diagram rrethor.

Tabela 1: Shpërndarja e parave të lotarisë

	%
Shteti	40
Shpërblime	35
Komisione	10
Tjetër	15

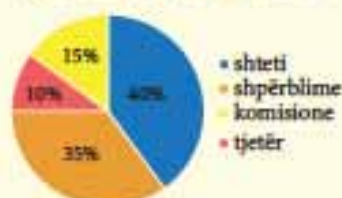
Zgjidhje:

1. Për të vizatuar diagramin rrethor kur të dhënat janë në përqindje, fillimisht duhet të caktojmë sa është këndi qendror që i përgjigjet përqindjeve të dhëna (shihni tabelën 1). Për shembull $40\% = 0,4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$.
2. Më pas, me këndmatës e vizatojmë secilin kënd të rrethit që i përgjigjet secilës prej kategorive (shteti, shpërblime, komisione dhe tjera). Në fund i shënojmë pjesët e rrethit (bëjmë legjendën) dhe i japim një titull (emër) diagramit.

Tabela 2: Llogaritja e këndit për secilën kategori

	%	këndi
Shteti	40	$0,40 \cdot 360^\circ = 144^\circ$
Shpërblime	35	$0,35 \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Komisione	10	$0,10 \cdot 360^\circ = 36^\circ$
Tjetër	15	$0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$

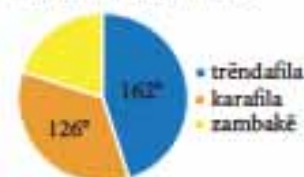
Shpërndarja e parave të lotarisë



Shembulli 4

Me diagram rrethor është paraqitur shitja e 3 llojeve të luleve në lulishten "Anemona". Nëse dihet që janë shitur gjithsej 720 copë lule, paraqitni të dhënat me një tabelë.

Lule të shitura në lulishte



Zgjidhje:

Së pari e përcaktojmë madhësinë e këndit që i përket pjesës së zambakëve të shitur. Meqë e gjithë vija rrethore ka 360° , kemi $360^\circ - 162^\circ - 126^\circ = 72^\circ$. E përcaktojmë se sa është këndi qendror që i përgjigjet 1 luleje. Gjitha 720 luleve u përgjigjet këndi 360° . Kështu, çdo një luleje i përket këndi $360^\circ : 720 = 0,5^\circ$. Për të përcaktuar sa është numri i luleve për secilin lloj, e pjesëtojmë këndin përkatës me këndin për 1 lule: Numri i trëndafilave të shitur $162^\circ : 0,5^\circ = 324$, numri i karafilave të shitur $126^\circ : 0,5^\circ = 252$, numri i zambakëve të shitur $72^\circ : 0,5^\circ = 144$.

Tabela 3: Numri i luleve të shitura në lulishten "Anemona"

Lule	Këndi	Numri i luleve
Trëndafila	162°	324
Karafila	126°	252
Zambakë	72°	144

Ka edhe mënyra të tjera për të llogaritur vlerat për plotësimin e tabelës. Mundohuni ta shpjegoni këtë në vijim: $162^\circ : 360^\circ = 0,45 = 45\%$; 45% e 720 është 324.

Detyra 2

Redaktorët e një televizioni lokal duan të dinë sa interes ka për emisionet e ndryshme në programin e tyre. Në tabelën 4 janë dhënë të dhënat nga hulumtimi.

- Vizatoni rishtas tabelën në fletoren tuaj.
- Paraqitni të dhënat me diagram rrethor.

Tabela 4: Përfaqësimi kohor i emisioneve të programit të një TV

	%	këndi
Reklama	25	
Lajme	15	
Muzikë	20	
Sport	10	
Filma	30	

Detyra 3

Me rastin e festës së patronatit të shkollës, nxënësit morën pjesë në aktivitete të ndryshme sportive. Rezultatet e pjesëmarrjes janë paraqitur në tabelën e mëposhtme:

Pjesëmarrja në aktivitete sportive shkollore

Aktiviteti sportiv	Numri i nxënësve
Futboll	35
Basketboll	20
Vrapim	25
Hendboll	15
Tjetër	25

Paraqitni të dhënat e tabelës me diagram rrethor, ku pranë çdo sektori do të shënohet përqindja përkatëse e nxënësve që kanë marrë pjesë në aktivitetin sportiv përkatës.

Udhëzime:

1. Llogaritni numrin e përgjithshëm të nxënësve që kanë marrë pjesë në aktivitetet sportive.
2. Llogaritni përqindjen e nxënësve që kanë marrë pjesë në secilin nga aktivitetet e përmendura.
3. Vizatoni një diagram rrethor, ku secili kënd në diagram do të ketë madhësinë që i përgjigjet përqindjes së nxënësve që kanë marrë pjesë në aktivitetin përkatës.

Detyra 4

Në një paralele nxënësit kanë plotësuar një anketë për lëndët e tyre të preferuara. Të dhënat nga anketa janë paraqitur me diagramin e dhënë me shtylla.

Paraqitni të dhënat, e diagramit me shtylla, në diagram rrethor, ku pranë çdo sektori do të tregoni edhe përqindjen e nxënësve që e kanë zgjedhur lëndën e caktuar si të preferuar.



Mendoni për mënyrën se si përzgjedhja e diagramit (me shtylla apo rrethor) mund të ndikojë në mënyrën se si njerëzit i kuptojnë të dhënat. Cilin lloj diagrami do të zgjidhje për të paraqitur të dhëna që tregojnë pjesë nga një e tërë dhe pse?

Përgjigjuni, në fletoren tuaj, pyetjeve.

1. A mund t'i paraqes të dhënat me llojin e duhur të diagramit (me shtylla apo rrethor)?
2. A i kushtoj vëmendje saktësisë së llogaritjeve dhe qartësisë së paraqitjes?
3. Në çfarë mund të përmirësohem në përpjekjen time të ardhshme për paraqitjen e të dhënave me diagram?

Punë e pavarur

1. Një organizatë që kryen kërkime lidhur me mjedisin jetësor ka marrë të dhëna të cilat janë regjistruar në tabelën e dhënë. Detyra juaj është të përgjigjeni në kërkesat e mëposhtme:

- Rishtas vizatoni dhe plotësoni tabelën në fletoren tuaj.
- Për cilin produkt përdoret më shumë druri i prerë?
- E sata pjesë e drurit të prerë përdoret për të gjitha produktet?
- Paraqitni të dhënat me një diagram rrethor, duke treguar përqindjet përkatëse të secilit sektor.

Për çfarë përdoret druri i prerë?	Pjesa e shpenzuar e drurit të prerë	%
Dru zjarri	$\frac{1}{4}$	
Letër	$\frac{1}{3}$	
Mobilje	$\frac{3}{10}$	
Tjetër		

2. a) Informohuni se cili është çmimi i rregullt, i pajisjeve për piknik, në dyqanet në vendin tuaj të banimit dhe shkruani në tabelë.

Produkte	Çmimi i rregullt	Çmimi me ulje
Karrige plazhi		
Tavolinë e vogël		
Karrige		
Ombrellë		

- Nëse ka ulje në masën $\frac{1}{3}$ nga çmimi i rregullt, llogaritni çmimin me ulje për secilin produkt dhe plotësoni tabelën.
 - Paraqitni të dhënat për çmimet e rregullta dhe ato me ulje me një diagram me shtylla.
 - Sa denarë nevojiten për të blerë të gjitha produktet me çmimet e tyre të rregullta, ndërsa sa me çmimet me ulje?
3. Tabela 3 tregon se si Maja i ka shpërndarë paratë e saj në muajin maj të vitit 2024. Paraqitni të dhënat me një diagram rrethor.

Tabela 3: Shpërndarja e mjeteve të Majës për muajin maj 2024

Shpërndarja e parave	Denarë	%	Këndi
Qiraja	6000		
Transporti	1800		
Ushqimi	12000		
Tjetër	3000		
Kursime	1500		

4. Anabela ka numëruar sa libra ka lexuar secili anëtar i familjes së saj gjatë një muaji:

- Babai i saj: 5 libra
- Nëna e saj: 8 libra
- Vëllai i saj: 3 libra
- Motra e saj: 4 libra

Vizatoni një diagram me shtylla për të paraqitur këto të dhëna.

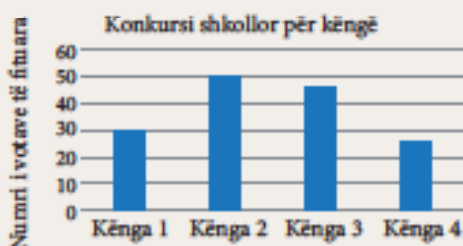
5. Vladimiri ka pyetur 40 nxënës të shkollës për sportin e tyre të preferuar dhe ka marrë këto të dhëna:

- Futboll: 16 nxënës
- Basketboll: 10 nxënës
- Volejbol: 8 nxënës
- Not: 6 nxënës

a) Paraqitni të dhënat në një tabelë.

b) Paraqitni këto të dhëna me një diagram rrethor.

6. Grafiku me shtylla më poshtë tregon sa vota kanë marrë katër këngë në konkursin shkollor për këngën më të mirë. Paraqitni të dhënat me një diagram rrethor.

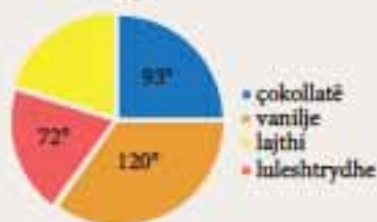


7. Në një shkollë është realizuar një anketë për shijet e preferuara të akullores mes 120 nxënësve. Të dhënat e fituara janë paraqitur në diagram rrethor.

a) Paraqitni të dhënat në tabelë.

b) Vizatoni një diagram me shtylla për këto të dhëna.

Shijet e preferuara të akullores



Vizatimi dhe interpretimi i diagramit vijor dhe piktogramit

Dy mënyra të thjeshta dhe efektive për paraqitjen vizuale të të dhënave janë diagrami vijor dhe piktogrami. Diagramin vijor e keni përdorur në klasën e gjashtë për të paraqitur ndryshimet e të dhënave me kalimin e kohës. Duke lidhur pikat që përfaqësojnë të dhënat, mund të ndiqnit prirjen dhe të nxirrni përfundim nëse ndonjë vlerë rritet, ulet apo mbetet e njëjtë.

Në këtë njësi mësimore do të njihemi me diagramin piktogram dhe do të mësoni si ta vizatoni dhe t'i interpretoni këto dy lloje diagramesh përmes shembujve nga jeta e përditshme.

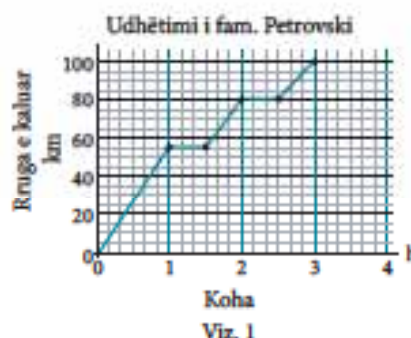


Shembulli 1

Familja Petrovski ka udhëtuar nga qyteti A drejt qytetit B, të cilët ndodheshin në një distancë prej 100 km. Në vizatimin 1 është dhënë distanca që kanë kaluar në një kohë të caktuar. Gjener:

- distancën e kaluar në orën e parë
- distancën e kaluar në orën e dytë
- distancën e përgjithshme të kaluar
- kohën e përgjithshme për pushim

Udhëzim: c) Koha e përgjithshme e kaluar për pushim është dy herë nga 30 minuta, edhe atë herën e parë një ore pas nisjes dhe një herë tjetër pas orës së dytë. Pra, familja Petrovski ka pushuar gjithsej 1 orë.



Shembulli 2

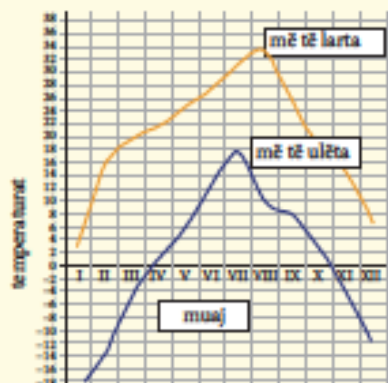
Të paraqiten grafikisht të dhënat për temperaturën mesatare më të lartë dhe më të ulët mujore në një qytet, të dhëna në tabelën 1.

Tabela 1 – Temperatura më e lartë dhe më e ulët sipas muajve

Muaji	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Temperatura më e lartë e regjistruar (°C)	5	18	22	24	27	30	34	36	28	21	17	9
Temperatura më e ulët e regjistruar (°C)	-18	-12	-3	3	8	15	20	12	10	5	-2	-10

Zgjidhje:

Për të paraqitur grafikisht këto të dhëna dhe për të vërejtur dallimet midis temperaturës më të lartë dhe më të ulët, nuk do të mjaftojë vetëm kuadranti i parë i sistemit koordinativ. Prandaj, diagramet janë vizatuar në kuadrantin e parë dhe të katërt. Në këtë mënyrë, me paraqitjen grafike do të kemi mundësinë të vërejmë edhe dallimin midis temperaturës mesatare më të lartë dhe më të ulët në qytetin e dhënë (vizatimi 2).



Viz. 2

Shembulli 3

Ndryshimet e motit gjatë një jave janë vëzhguar dhe paraqitur me piktogram, ndërsa temperaturat e matura janë dhënë në tabelë.

Piktogrami për motin, sipas ditëve, në një javë

E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte	E shtunë	E diel
○	○	●	☁	●	○	○

Tabela - Temperatura në ditët e një jave

Dita	Temperatura (°C)
E hënë	28
E martë	30
E mërkurë	25
E enjte	22
E premte	24
E shtunë	29
E diel	31

Piktogrami është diagram që përdor simbole ose figura për paraqitjen e të dhënave, ku çdo simbol ka një vlerë të caktuar numerike. Ky lloj diagrami është veçanërisht i dobishëm për krahasim vizual.

- Sipas piktogramit, cila ditë ka qenë me të rreshura?
- Në cilën ditë është matur temperatura më e ulët?
- Cila ditë ka qenë më e nxehtë?
- A është gjithmonë temperatura e njëjtë kur ka diell? Shpjegoni.

- d) Sipas të dhënave, vizatoni një diagram vijor që tregon temperaturat gjatë javës.
- dh) Si ka ndryshuar temperatura gjatë javës? A mund të dallosh prirjen e temperaturës (a rritet temperatura, mos vallë ulet ose ka pasur luhatje)?

Zgjidhje:

a) Dita me të rreshura është e enjta, sepse ka simbolin  për mot me shi.

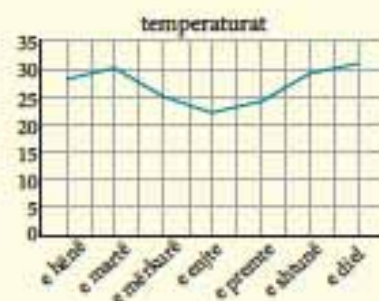
b) Temperatura më e ulët është 22°C , e matur të enjten.

c) Dita më e nxehtë është e diela, me temperaturë 31°C .

ç) Jo, edhe pse në ditët më të ngrohta ka diell (të martën, të shtunën dhe të dielën), nga piktogrami shihet se edhe të hënën ka diell, por temperatura është më e ulët se në ditët e tjera. Kjo tregon se përveç diellit, temperaturën mund ta ndikojnë edhe faktorë të tjerë si era ose lagështia e ajrit.

d) Diagrami vijor për temperaturat është dhënë në vizatim.

dh) Temperatura të martën është rritur në krahasim me të hënën. Të mërkurën dhe të enjten ka pësuar rënie të ndjeshme. Nga e premja deri të dielën ka rritje përsëri, duke arritur vlerën më të lartë të dielën (31°C). Shihet se temperaturat nuk janë të qëndrueshme, por ndryshojnë gjatë javës.



Detyra 1

Një supermarket ndjek shitjet e llojeve të ndryshme të frutave gjatë një jave. Të dhënat për numrin e kilogramëve të shitur janë paraqitur me piktogram, ku secili nga simbolet: , ,  përfaqëson 5 kg fruta.

Piktogrami për shitjet:

E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte	E shtunë	E diel
  	 	  	  	   	   	    

- a) Paraqitni të dhënat në një tabelë.
- b) Cilën ditë janë shitur më shumë kilogramë frutash?
- c) Cilën ditë ka pasur shitje më të vogël të frutave?
- ç) Cili lloj frutash është shitur më shumë gjatë javës?
- d) Shitja e përgjithshme e frutave përgjatë javës, a mund të tregohet me diagram vijor? Shpjegoni përgjigjen tuaj. Përzgjidhni diagramin me të cilin do t'i paraqitni të dhënat.
- dh) A ka ditë me të njëjtën shitje totale të frutave? Cilat janë ato ditë?
- e) Si ka ndryshuar shitja e frutave gjatë javës? A mund të dallosh ndonjë prirje të shitjes (a ka rritje, ulje apo ka luhatje)?

Shembulli 4

Nxënësit e një shkolle kanë vendosur të hulumtojnë sa kohë kalojnë çdo ditë në aktivitete të ndryshme gjatë një jave. Ata kanë përdorur një piktogram për të paraqitur të dhënat e mbledhura.

Piktogrami:  = 1 orë

Aktiviteti	E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte	E shtunë	E diel
Mësim 	  	 	  	 	 		
Shikim TV 	 	 		 	  	   	  
Sport  	 	 	 		  	  	 
Lojëra 	 	  		 	 	  	   

- Cili aktivitet është më i përhapur gjatë javës?
- Cili aktivitet ka më pak orë gjatë javës?
- Në cilën ditë nxënësi ka kaluar më shumë kohë para ekranit (shikim TV dhe lojëra)?
- Në cilat ditë nxënësi ka kaluar të njëjtën kohë në mësim?
- Vizatoni një piktogram për numrin total të orëve të kaluara për secilin aktivitet gjatë javës, nëse  = 2 orë.
- Analizoni: A është koha e kaluar në mësim dhe sport e mjaftueshme në krahasim me kohën para ekranit? Çfarë mund të ndryshohet?
- Propozoni një orar të ri javor ku të gjitha aktivitetet do të ishin më mirë të balancuara.

Zgjidhje:

Fillimisht, llogaritim numrin e orëve të përgjithshme për secilin aktivitet gjatë javës:

Aktiviteti	E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte	E shtunë	E diel	Gjithsej
Mësim 	3	2	3	2	2	1	1	14 h
Shikim TV 	2	2	1	2	3	4	3	17 h
Sport  	2	2	2	1	3	3	2	15 h
Lojëra 	2	3	1	2	2	3	4	17 h

- Shikimi i TV  (17 orë) dhe lojërat  (17 orë) janë dy aktivitetet më të përhapura.
- Mësimi  (14 orë) është aktiviteti që i është kushtuar më pak kohë.
- Të shtunën (7 orë) dhe të dielën (7 orë).
- Të hënë dhe të mërkurën (nga 3 orë), të enjten dhe të premten (nga 2 orë), të shtunën dhe të dielën (nga 1 orë).

d) Piktogrami për numrin total të orëve gjatë javës:

Legjenda  = 2 orë

Mësim :       

Shikim TV :        

Sport  :       

Lojëra :       

dh) Koha e kaluar para ekranit (34 orë) është shumë më e madhe se koha për mësim (14 orë) dhe sport (15 orë). Për një balancë më të mirë, mund të ulet koha për TV dhe lojëra dhe të shtohen më shumë aktivitete në natyrë ose më shumë kohë për mësim.

e) Për shembull:

Ulje në 10-12 orë në javë e kohës së shikimit të TV .

Ulje në 10-12 orë në javë e kohës së lojërave .

Rritje në 16-18 orë në javë e kohës për mësim .

Rritje në 18 orë në javë e kohës për sport  , për shëndet më të mirë dhe jetë aktive.

Duhet ta dini si ta organizoni kohën tuaj për të pasur një balancë më të mirë mes mësim, rekreacionit dhe aktiviteteve të lira. Kjo analizë me piktogram ndihmon të kuptoni rëndësinë e kohës dhe menaxhimin e saj.

Detyra 2

Një shitës në treg shet lloje të ndryshme frutash dhe mban evidencë për numrin e kilogramëve të shitur çdo ditë gjatë një jave. Të dhënat janë paraqitur në tabelën e mëposhtme:

Dita	Mollë (kg)	Banane (kg)	Portokaj (kg)	Rrush (kg)
E hënë	10	8	4	8
E martë	12	10	7	6
E mërkurë	9	7	6	8
E enjte	16	12	8	9
E premte	14	10	6	10
E shtunë	21	20	16	13
E diel	18	15	12	10

a) Cili lloj frutash është shitur më shumë gjatë javës?

b) Cilën ditë është bërë shitja më e madhe e frutave në përgjithësi?

c) Përpiloni një piktogram ku për sasinë e përgjithshme të shitur të frutave nëpër ditë do ta përdorni simbolin  që paraqet 10 kilogramë.

c) Çfarë problemi do të kishim nëse do të duhej të përpilonim piktogram ku secili prej simboleve , , ,  paraqet 10 kilogramë.

d) Cili lloj frutash është shitur më pak gjatë javës?

dh) Paraqitni të dhënat me një diagram vijor për shitjet e përgjithshme nëpër ditët përkatëse dhe analizoni në cilat ditë ka pasur rritje ose ulje të papritur të shitjeve.

e) Çfarë mund të përfundoni për zakonet e konsumit të njerëzve? Në cilën ditë ka më shumë blerës dhe përse?

Pse piktogramet janë të dobishme për paraqitjen e të dhënave në krahasim me lloje të tjera diagramësh? Në cilat situata do të ishte më mirë të përdorni diagram vijor në vend të piktogramit?

Rishtas vizatoni dhe plotësoni tabelën në fletoren tuaj.

Aftësi	E zotëruar plotësisht ☒	E zotëruar pjesërisht ☐	Më duhet ndihmë ☒
Vizatoj dhe interpretoj piktogram			
Vizatoj dhe interpretoj diagram vijor			
Krahasoj lloje të ndryshme diagramësh			
I aplikoj diagramet në situata reale			

Shkrim i shkurtër reflektues:

- Shkruani një gjë që ke mësuar për piktogramet dhe diagramet vijore që do të të jetë e dobishme në jetën e përditshme.
- Cila pjesë e mësimi ishte më e lehtë për ty e cila më kërkuese?

Punë e pavarur

- Një dyqan biçikletash mban evidencë për numrin e biçikletave të shitura gjatë gjashtë muajve. Të dhënat janë paraqitur në tabelën e mëposhtme:

Muaji	Janar	Shkurt	Mars	Prill	Maj	Qershor
Biçikleta	12	18	25	30	50	60

- Paraqitni të dhënat me piktogram.
 - Analizoni të dhënat dhe shpjegoni çfarë prirje, tendence, vërehet.
 - Në cilin muaj ka pasur rritje më të madhe të shitjeve? Çfarë faktorësh mendon se mund ta kenë shkaktuar këtë rritje?
 - Nëse prirja vazhdon, parashikoni sa biçikleta mund të shiten në korrik.
- Imagjinoni se duhet të krijoni një sistem për ndjekjen e aktivitetit fizik të nxënësve në shkollën tuaj. Do të mbledhni të dhëna për numrin e hapave që bëjnë çdo ditë dhe do t'i paraqitni me piktogram.
 - Propozoni simbole për piktogramin (p.sh.  për 1000 hapa).
 - Gjeni një mënyrë si nxënësit mund të regjistrojnë hapat e tyre dhe si ato do të shndërrohen në një paraqitje grafike.

- c) Ndërttoni një shembull të një piktogrami për të dhënat e një jave për një nxënës.
- ç) Mendohuni se si ky sistem mund të motivojë nxënësit të jenë më aktivë dhe propozoni përmirësime.
3. Shqyrtoni situatën në vijim: Një grup nxënësish dëshiron të paraqesë të dhëna për sportet e preferuara të shokëve të tyre të klasës. Disa vendosin të bëjnë piktogram, të tjerët diagram me shtylla dhe disa diagram rrethor.
- a) Vlerësoni cili lloj diagrami është më i përshtatshëm për këtë situatë dhe pse.
- b) Nëse duhet të prezantoni të dhënat në një manifestim shkollor para një audience të madhe, cilin diagram do ta zgjidhje dhe pse.
- c) A ka situata ku piktogrami nuk do të ishte zgjedhja më e mirë? Shpjegoni pse.
- ç) Bëni një analizë kritike të anëve të forta dhe të dobëta të secilit lloj diagrami në lidhje me lehtësinë e leximit, saktësinë dhe kuptueshmërinë e të dhënave. Mund të përdorni tabelë për të shkruar avantazhet dhe disavantazhet për secilin diagram.
4. Maria stërvitet në atletikë dhe mban evidencë të kohës (në sekonda) që i duhet për të vrapuar 100 metra gjatë një jave. Rezultatet e saj janë në tabelën e mëposhtme:

Dita	E hënë	E martë	E mërkurë	E enjte	E premte	E shtunë	E diel
Koha (s)	18,5	18,3	18,0	17,8	17,5	17,4	17,2

- a) Paraqitni të dhënat me një diagram vijor.
- b) Në cilën ditë Maria ka pasur kohën më të mirë?
- c) A po përmirësohet koha e saj gjatë javës? Shpjegoni.
- ç) Midis cilave dy ditëve radhazi ka përmirësimin më të madh të kohës?
- d) Çfarë prirje, në lidhje me kohën e arritur, mund të vëresh nga ky diagram?
- dh) Nëse Maria vazhdon të stërvitet me të njëjtin ritëm, çfarë mund të presim për kohën e saj në ditët në vijim?

Klasa modale dhe diagrami i frekuencave për të dhënat e grupuara

Në këtë njësi mësimore do të mësoni si të gjeni informacione të rëndësishme, si moda, mediana dhe rangu, kur të dhënat janë të grupuara. Të dhënat e grupuara janë ato që janë të organizuara në grupe ose intervale për t'u bërë më të qarta dhe më të lehta për analizë.

Në këtë njësi mësimore do të mësoni si të nxirrni informacione të rëndësishme nga këto të dhëna, që mund t'i përdorni në situata të përditshme. Për shembull, imagjinoni që je organizator i një ngjarjeje shkollore dhe duhet të përcaktoni madhësinë më të shpeshtë të këpucëve të nxënësve për të bërë porositë e pajisjeve të përshtatshme. Përveç kësaj, duhet të dini madhësinë mesatare dhe cili është intervali i shtrirjes së numrave, që t'i planifikoni porositë.



Shembulli 1

Nxënësit e një paraleleje duan të zbulojnë cila është lartësia më e shpeshtë në klasë, si dhe të gjejnë vlerën mesatare të lartësisë së nxënësve. Ata mbledhën të dhëna për lartësinë (në cm) të gjithë nxënësve në klasë:

Të dhënat e grumbulluara për lartësinë (në cm): 150, 155, 160, 165, 160, 170, 175, 160, 165, 155, 160

Zgjidhje:

Moda (vlera më e shpeshtë): 160 cm

Rangu (dallimi mes vlerës më të madhe dhe asaj më të vogël): $175 - 150 = 25$ cm

Pas renditjes së të dhënave sipas madhësisë: 150, 155, 155, 160, 160, 160, 160, 165, 165, 170, 175, vlera që gjendet në mesin e vlerave të të dhënave (lartësia e gjashtë) është 160 cm, kështu që mediana është 160 cm.

Aktivitet shtesë: Mbledhni të dhëna për ndonjë karakteristikë tjetër (si për shembull, madhësinë e mbathjeve) dhe llogaritni vetë madhësitë e sipërpërmendura.

Detyra 1

Ana ka matur sa kohë kalojnë shoqet e saj duke parë televizor gjatë ditëve të punës pasdite (në minuta). Ajo fitoi këto të dhëna: 30, 45, 60, 45, 30, 60, 45

- Cili numër minutash është më i shpesht (sa është moda)?
- Sa është mediana?
- Sa është rangu i të dhënave?

Shembulli 2

Nxënësit e një klasë dëshironin të zbulojnë sa kohë zakonisht u duhet për të arritur në shkollë. Për këtë qëllim ata bënë një anketë dhe regjistruan kohën (në minuta) që u nevojitej për udhëtim:

Të dhënat e grumbulluara (në minuta):

6	10	12	15	18	20	20	20	22	25
30	23	11	27	24	29	16	28	25	11
14	16	27	6	13	24	19	7	17	22

- Paraqitni të dhënat në një tabelë me të dhëna të grupuara.
- Përcaktoni klasën modale.
- Përcaktoni klasën që përmban medianën.

Zgjidhje:

- Grupojmë të dhënat në intervale me gjatësi të barabarta dhe i paraqesim në tabelë:

Koha (minuta)	Numri i nxënësve
6 – 10	4
11 – 15	6
16 – 20	8
21 – 25	7
26 – 30	5

Klasa modale është intervali me frekuencë më të madhe në të dhënat e grupuara.

- Klasë modale është intervali 16 – 20 minuta, sepse ka më shumë nxënës (8 nxënës).
- Klasa që përmban medianën është intervali që përmban vlerën në mesin e të dhënave, nëse të dhënat janë renditur sipas madhësisë. Në këtë bashkësi prej 30 të dhënash kjo do të jetë e dhëna e 15-të ose e 16-të, që në këtë rast përsëri gjendet brenda klasës 16 – 20 minuta.

Klasa modale përdoret kur të dhënat janë të grupuara, ndryshe nga moda, që është vlerë specifike në të dhënat e pa grupuara.

Nëse dy ose më shumë klasa kanë frekuencën e njëjtë më të madhe, atëherë të dhënat kanë dy (ose më shumë) klasa modale.

Shembulli 3

Nxënësit e njërit seksion të bibliotekës kanë bërë një hulumtim për numrin e librave të lexuar, nga biblioteka shkollë, gjatë gjysmës së parë të vitit. Ata pyetën shokët e tyre të klasës dhe morën këto rezultate: 0, 1, 2, 0, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 2, 2, 4, 6, 3, 3, 1, 4, 0, 3, 7, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 5.

- Përgatitni një tabelë me të dhëna të grupuara.
- Vizatoni një diagram frekuencor për të dhënat e grupuara.
- Interpretoni rezultatet:
 - Cili interval ka frekuencën më të madhe, përkatësisht në cilin interval më shumë nxënës lexojnë libra?
 - Çfarë na tregon grupi më i shpeshtë për leximin e librave nga nxënësit?
 - A tregojnë rezultatet për një kulturë të mirë leximi apo ka hapësirë për përmirësim? Shpjegoni mendimin tuaj.
- Analizë e rasteve të veçanta:
 - A ka ndonjë informacion të papritur në shpërndarjen e të dhënave? Për shembull, a ka numër të papritur të vogël nxënësish që lexojnë shumë libra apo numër të papritur të madh nxënësish që lexojnë pak ose aspak?
 - Cili është propozimi yt për aktivitete ose masa që do të përmirësojnë kulturën e leximit bazuar në analizën e këtyre të dhënave?

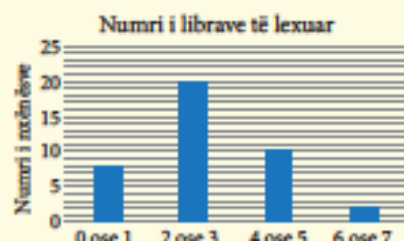
Zgjidhje:

- Tabela me të dhëna të grupuara:

Numri i librave të lexuar	Numri i nxënësve (frekuenca)
0 – 1	8
2 – 3	20
4 – 5	10
6 – 7	2

- Vizatimi i diagramit me shtylla për të dhënat e grupuara është i ngjashëm sikur vizatimi i diagramit për të dhënat e pagrupuara, vetëm se tani çdo shtyllë i përgjigjet një intervali nga tabela e frekuencës për të dhënat e grupuara. Gjitha shtyllat kanë gjerësi të njëjtë, kurse lartësia varet nga frekuenca e grupit përkatës së të dhënave.

- Frekuencë më të madhe ka intervali me 2 deri 3 libra të lexuar, përkatësisht shumica e nxënësve kanë lexuar 2 ose 3 libra. Në diagram kjo është shtylla më e lartë që njëkohësisht tregon edhe klasën modale. Te numri më i madh i librave të lexuar frekuencat janë më të vogla, që, sipas rezultateve, nënkupton se ka hapësirë për nxitje të leximit.



- Nëse i krahasojmë lartësitë e shtyllave të diagramit me shtylla (frekuencat), lehtë vërejmë se ka numër të papritur të vogël të nxënësve që lexojnë numër të madh librash në krahasim me nxënësit që kanë lexuar një ose nuk kanë lexuar as edhe një libër.

Detyra 2

Të dhënat e grupuara për lartësinë e nxënësve (në cm):

- Vizatoni një diagram me shtylla për të dhënat e grupuara.
- Caktoni klasën modale.
- Caktoni klasën në të cilën gjendet mediana.

Intervali (cm)	Frekuenca
150 – 154	3
155 – 159	7
160 – 164	10
165 – 169	5
170 – 174	2

Shembulli 3

Nxënësit e klasës së shtatë vendosën të hulumtojnë sa është numri i hapave që mesatarisht bëjnë në një ditë. Ata përgjatë një jave numëruan hapat që bënin çdo ditë dhe të dhënat i regjistruan. Për analizë më të lehtë, vendosën të dhënat t'i grupojnë në intervale:

Numri i hapave në ditë	Frekuenca (numri i nxënësve)
2000 – 3999	4
4000 – 5999	6
6000 – 7999	10
8000 – 9999	8
10000 – 11999	5

- Cili interval paraqet klasën modale të këtyre të dhënave?
- Çfarë tregon kjo në lidhje me aktivitetin fizik të nxënësve?

Zgjidhje:

- Nga tabela vërejmë se frekuencë më të madhe ka intervali 6000 – 7999 hapa (me 10 nxënës). Klasa modale është 6000 – 7999 hapa në ditë.
- Kjo tregon që shumica e nxënësve, të përfshirë në këtë hulumtim, bëjnë midis 6000 dhe 7999 hapa në ditë. Sipas rekomandimeve për aktivitet fizik, për jetë të shëndetshme, nxënësit duhet të bëjnë të paktën 10000 hapa në ditë. Këto të dhëna tregojnë se numri më i madh i nxënësve duhet të lëvizin më shumë që të përmirësojnë aktivitetin e tyre fizik.

Detyra 3

Iliri, ka bërë një hulumtim për numrin e faqeve që lexojnë nxënësit, për detyrë shtëpie, në një javë. Ai të dhënat e fituara i ka grupuar në intervale.

- Sa është numri i përgjithshëm i nxënësve nga të cilët ka mbledhur të dhënat?
- Cila është klasa modale?
- Jepni një përfundim për zakonet e leximit të nxënësve.

Intervali (numri i faqeve të lexuara)	Frekuenca (numri i nxënësve)
1 – 10	2
11 – 20	5
21 – 30	8
31 – 40	3
41 – 50	2

Detyra 4

Nxënësit e klasës së shtatë në orën e fizikës bënë një eksperiment për të hulumtuar se si sipërfaqet e ndryshme ndikojnë në numrin e kërcimeve të një tophiti që bie nga një metër lartësi. Për 20 testimet e kryera, nxënësit regjistruan numrin e kërcimeve të tophitit. Rezultatet (numri i kërcimeve) janë: 3, 4, 4, 5, 3, 3, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 4, 5

- Të dhënat e grupuara (përdorni intervalet 3-4, 5-6, kërcime) paraqitni në një tabelë.
- Vizatoni një diagram.
- Interpretoni rezultatet:
 - Caktoni klasën modale dhe çka tregon ajo për efektin që ka sipërfaqja në numrin e kërcimeve të tophitit.
 - Shpjegoni se çka mund të nënkuptojmë, nëse ndonjë interval ka frekuencë qenësish më të vogël se një tjetër.
 - Mendoni se si cilësia e sipërfaqes (për shembull, e lëmuar ose e vrazhdë) mund të ndikojë në numrin e kërcimeve të tophitit.
 - Propozoni masa ose eksperimente shtesë që do të na ndihmonin të fitojmë pasqyrë më të qartë për ndikimin e llojeve të ndryshme të sipërfaqeve mbi numrin e kërcimeve të tophitit.

Sfidë plotësuese për eksperiment:

Realizoni një eksperiment në të cilin do të përdoren sipërfaqe saktësisht të përkufizuara (për shembull, gomë, plastikë, metal) që të matet numri i kërcimeve të tophitit nga sipërfaqja përkatëse. Analizoni rezultatet për të vërtetuar nëse ka një korelacion mes llojit të materialit të sipërfaqes dhe numrit të kërcimeve të tophitit.

Nëse në një seksion sportiv, sportistët janë ndarë sipas numrit të trajnimeve javore, kurse klasa modale është 5 – 6 trajnime, çfarë mund të përfundoni për zakonet e sportistëve? A thua shumica e sportistëve trajnojnë mjaftueshëm, më shumë ose shumë pak? Si do ta përdornit këtë të dhënë me qëllim përmirësimin e rezultateve sportive të këtij grupi?

Rishtas vizatoni dhe plotësoni tabelën në fletore. Diskutoni me shokët/shoqet e klasës përgjigjet tuaja.

Shkathtësia	E zotëruar plotësisht	E zotëruar pjesërisht	Më duhet ndihmë
Grupimi i të dhënave në intervale			
Vizatimi i diagramit frekuencor			
Interpretimi i rezultateve të diagrameve			
Zbatimi i asaj që mësuam në kontekst të përditshmërisë			

Punë e pavarur

1. Në muzeun e qytetit tënd është bërë një anketë për moshën e vizitorëve gjatë një dite. Të dhënat janë grupuar në intervalet e mëposhtme:

Mosha e vizitorëve të muzeut

Intervali (mosha)	Frekuenca (numri i vizitorëve)
15 – 24	12
25 – 34	18
35 – 44	10
45 – 54	8
55 – 64	5

- a) Sa vizitorë kishte atë ditë në muze?
- b) Sa është klasa modale?
- c) Çfarë mund të përfundoni nga klasa modale?
2. Një menaxher dëshiron të rrisë fitimin e kompanisë së tij, por e di që duhet të investojë në marketing. Pas një studimi për 15 muajt e fundit për shpenzimet në marketing, janë marrë këto të dhëna:
- | Shpenzimet (denarë) | Numri i muajve |
|---------------------|----------------|
| 1 – 10000 | 1 |
| 10001 – 20000 | 2 |
| 20001 – 30000 | 4 |
| 30001 – 40000 | 7 |
| 40001 – 50000 | 1 |
- a) Vizatoni një diagram frekuencor për të dhënat e grupuara.
- b) Përcaktoni klasën modale.
- c) Gjeni klasën që përmban medianën.
- ç) Nëse dëshiron të rrisë investimin në marketing për 15%, sipas cilës masë për vlerën mesatare duhet të veprojë, sipas klasës modale apo sipas klasës që përmban medianën?
3. Në një eksperiment, një grup nxënësish mbjellin 50 fara të bimës së njëjtë në kushte të ndryshme: lagështi përkatëse dhe mungesë uji. Pas 30 ditësh matën lartësinë e bimëve dhe regjistruan rezultatet në centimetra.

Lagështia përkatëse:

12 15 12 13 14 9 16 18 20 21
 14 17 12 15 16 22 15 19 24 8
 17 13 14 9 16 18 20 21 9 20
 8 15 13 14 9 16 18 20 21 10
 10 9 12 16 19 8 16 17 24 21

Mungesa e ujit:

7	9	12	11	10	9	15	8	6	19
4	8	14	15	7	10	12	19	3	11
17	13	9	5	11	6	4	13	9	2
15	13	10	6	9	8	15	20	13	8
9	9	7	13	18	8	6	10	22	5

- Gruponi të dhënat në intervale dhe ndërtoni diagrame frekuencore për secilin kusht, përkatësisht.
- Interpretoni rezultatet dhe shpjegoni ndikimin që kanë kushtet e ndryshme mbi rritjen e bimëve.

Sfidë shtesë: Bëni një hulumtim tuajin për ndikimin e faktorëve të tjerë në rritjen e bimëve.

- Mblidhni të dhëna për rreshjet vjetore të shiut në tre rajone gjeografike të ndryshme: malore, bregdetare dhe ultësira. Gruponi të dhënat në intervale prej 100 mm dhe ndërtoni diagrame frekuencore për secilin rajon. Interpretimi rezultatet duke shpjeguar si ndikojnë karakteristikat gjeografike në sasinë e reshjeve.

Vlerësimi dhe njehsimi i mesatares aritmetike. Krahasimi i dy bashkësive të të dhënave

Imagjinoni që ekipi juaj sportiv i preferuar ka luajtur disa ndeshje dhe dëshironi të dini sa pikë mesatarisht fiton në çdo ndeshje. Ose ndoshta dëshironi të krahasoni se cili nga dy sportistët është më i qëndrueshëm në rezultatet e tyre. Për të përshkruar këto situata, janë të dobishme mesatarja aritmetike, mediana, moda dhe rangi.

Në këtë njësi mësimore do të mësoni si të vlerësoni mesataren aritmetike nga të dhënat e paraqitura në diagrame, e pastaj ta verifikoni vlerësimin tuaj përmes llogaritjes. Gjithashtu, do të



krahasoni dy grupe të ndryshme të dhënash duke përdorur metoda të ndryshme.
Këto aftësi do të ndihmojnë të analizoni informacionin dhe të merrni vendime më të mira në jetën e përditshme!

Shembulli 1

Në tabelën e dhënë është treguar sa libra kanë lexuar 15 nxënës gjatë pushimeve të verës:

- Cila është moda për këto të dhëna?
- Përcakto medianën.
- Përcakto rangun e të dhënave.

Numri i librave	Numri i nxënësve
1	2
2	3
3	5
4	3
5	2

Zgjidhje:

Moda është 3 (5 nxënës kanë lexuar nga 3 libra), mediana: 3, rang: $5 - 1 = 4$.

Detyra 1

Amra ka matur kohët e 40 shokëve të saj që kanë marrë pjesë në një garë vrapimi në 100 metra:

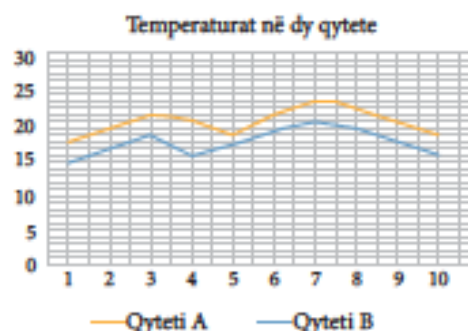
- Përcakto klasën modale.
- Nëse i renditim kohët, në cilin interval do të jetë mediana?

Koha(sekonda)	Numri i nxënësve
12 - 14	4
15 - 17	10
18 - 20	15
21 - 23	8
24 - 26	3

Shembulli 2

Në diagramin vijor, djathtas, janë treguar temperaturat mesatare ditore (në °C) në dy qytete të ndryshme A dhe B për 10 ditë.

- Vlerësoni mesataren aritmetike të temperaturave në qytetin A dhe në qytetin B bazuar në këtë diagram.
- Llogaritni mesataren e saktë aritmetike për secilin qytet dhe krahasoni me vlerësimin tuaj.
- Përcaktoni medianën për secilin qytet.



- c) Përcaktoni modën për secilin qytet, nëse ekziston.
 d) Përcaktoni rangun e temperaturave për secilin qytet.
 dh) Cili qytet ka temperatura më të qëndrueshme? Shpjegoni përgjigjen tuaj bazuar në vlerat e llogaritura.

Zgjidhje:

- a) Vlerësimi i mesatares aritmetike

Qyteti A: Vlerat janë midis 18 dhe 24, prandaj mesatarja e vlerësuar është rreth 21 °C.

Qyteti B: Vlerat janë midis 15 dhe 21, prandaj mesatarja e vlerësuar është rreth 18 °C.

- b) Llogaritja e mesatares aritmetike

Mesatarja aritmetike është herësi i shumës së të gjitha të dhënave me numrin e gjithë mbledhësve $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

$$\text{Qyteti A: } \bar{X}_A = \frac{18+20+22+21+19+23+24+22+20+19}{10} = 20,8^\circ\text{C}$$

$$\text{Qyteti B: } \bar{X}_B = \frac{15+17+19+16+18+20+21+20+18+16}{10} = 18^\circ\text{C}$$

- c) Mediana:

$$\text{Qyteti A: } 18, 19, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 24 \rightarrow \text{mediana} = \frac{20+21}{2} = 20,5^\circ\text{C}$$

$$\text{Qyteti B: } 15, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21 \rightarrow \text{mediana} = \frac{18+18}{2} = 18^\circ\text{C}$$

Meqenëse ka numër çift të të dhënave, mediana është mesatarja aritmetike e këtyre dy vlerave të mesme.

- ç) Moda:

Qyteti A: 19, 20 dhe 22 shfaqen nga dy herë $\rightarrow$ moda = 19, 20 dhe 22 (ky është shembull kur bashkësia e të dhënave ka më shumë se një modë)

Qyteti B: 16, 18 dhe 20 shfaqen nga dy herë $\rightarrow$ Moda = 16, 18 dhe 20

- d) Rangu:

$$\text{Qyteti A: } 24 - 18 = 6^\circ\text{C}; \text{ Qyteti B: } 21 - 15 = 6^\circ\text{C}$$

- dh) Krahasimi i temperaturave në dy qytetet

Qyteti A ka mesatare aritmetike më të lartë (20.8 °C krahasuar me 18.0 °C).

Qyteti B ka temperatura më të ulëta, por të njëjtin rang temperaturash (6 °C).

Ndryshimet e temperaturës janë të ngjashme në të dy qytetet, pasi kanë të njëjtin rang.

Edhe pse të dy qytetet kanë të njëjtin rang temperaturash, qyteti A ka përgjithësisht klimë më të ngrohtë.

Detyra 2

Një shkollë ka zhvilluar testim për edukim medial në 2 paralele të klasës së 7-të. Nga secila paralele janë testuar rastësisht 10 nxënës, ndërsa tabela e mëposhtme tregon rezultatet (pikë nga 0 deri në 10):

Tabela: Rezultatet nga testi për edukimin medial

Nxënësi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 A	6	8	5	7	6	9	8	6	7	5
7 B	7	6	9	8	6	5	9	7	6	8

- Vlerësoni mesataren aritmetike të rezultateve për secilën klasë.
- Llogaritni mesataren e saktë aritmetike për secilën klasë dhe krahasoni me vlerësimin tuaj.
- Cila klasë ka medianë më të madhe?
- Përcaktoni rangun e rezultateve për secilën klasë.
- Cila klasë ka shpërndarje më të barabartë të rezultateve? Shpjegoni.

Shembulli 3

Një grup nxënësish nga klasa e shtatë ka matur shpejtësinë e biçiklistëve që kalojnë në shtegun e biçikletave pranë oborrit të shkollës. Ata i kanë matur shpejtësitë (në km/h) të 10 biçiklistëve dhe i kanë organizuar në tabelën më poshtë:

Biçiklisti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Shpejtësia (km/h)	12	15	14	13	15	17	16	14	15	18

- Vlerësoni mesataren aritmetike të shpejtësive të biçiklistëve.
- Llogaritni mesataren e saktë aritmetike të shpejtësive.
- Përcaktoni medianën e të dhënave.
- Cila e dhënë është moda për këto të dhëna?
- Përcaktoni rangun e të dhënave.
- Nëse shpejtësia maksimale e lejuar në shteg është 15 km/h, sa biçiklistë kanë tejkaluar këtë shpejtësi?
- Çfarë mund të nxirrni si përfundim për sigurinë e biçiklistëve dhe pjesëmarrësve të tjerë në trafik bazuar në këto të dhëna?

Zgjidhje:

- Vlerësimi i mesatares aritmetike:
Shpejtësitë luhaten kryesisht nga 12 deri në 18 km/h, kurse më shpesh janë rreth 15 km/h.
Pra, mesatarja e vlerësuar aritmetike është rreth 15 km/h.
- Llogaritja e mesatares aritmetike:
$$\bar{X} = \frac{12+15+14+13+15+17+16+14+15+18}{10} = 14,9 \text{ km/h}$$
- Mediana: Shpejtësitë e radhitura: 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 18
Vlerat e mesme janë 15 dhe 15, prandaj mediana = $\frac{15+15}{2} = 15 \text{ km/h}$.
- Moda: Numri 15 km/h shfaqet më shpesh (3 herë), pra moda është 15 km/h.
- Rangu: Rangu = $18 - 12 = 6 \text{ km/h}$.

dh) Shpejtësitë mbi kufirin e lejuar (15 km/h):

Vlerat mbi 15 km/h: 17 km/h, 16 km/h, 18 km/h.

Tre biçiklistë kanë tejkaluar shpejtësinë e lejuar.

e) Përfundimi për sigurinë:

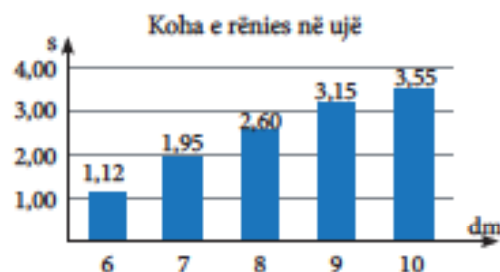
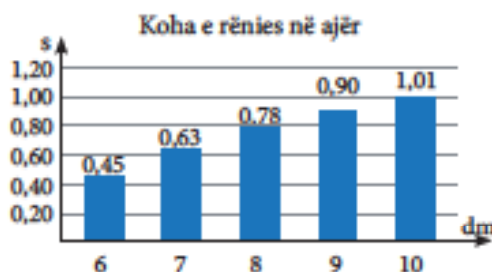
Mesatarja e shpejtësive është 14.9 km/h, që është shumë afër kufirit të lejuar.

Tre biçiklistë e kanë tejkaluar shpejtësinë, që potencialisht paraqesin rrezik të mundshëm.

Mund të shqyrtohen masa për përmirësimin e sigurisë, si vendosja e sinjaleve për kufizim shpejtësie ose ngritja e ndërgjegjësimin për rreziqet nga vozitja me shpejtësi të madhe.

Detyra 3

Një grup nxënësish në laboratorin e fizikës lëshojnë një top nga lartësi të ndryshme dhe matin kohën e rënies së tij. Eksperimenti kryhet në dy mjedisë të ndryshme: në ajër dhe në ujë. Të dhënat e matjeve janë paraqitur në diagrame me shtylla:



- Vlerësoni mesataren aritmetike të kohës së rënies në ajër dhe në ujë bazuar në diagramet e dhëna.
- Llogaritni mesataren e saktë aritmetike për secilin rast.
- Përcaktoni medianën e kohës së rënies për të dy mjediset.
- Përcaktoni rangun e të dhënave për ajër dhe ujë.
- Duke përdorur vlerat e fituara, krahasoni dy mjediset.
Si ndikon mjedisi në kohën e rënies?

Në dy zona të ndryshme (malore dhe fushore) në Maqedoninë e Veriut gjatë një jave janë vëzhguar kushtet e motit. Në zonën malore temperaturat janë më të ulëta dhe reshjet më të shpeshta, ndërsa në zonën fushore temperaturat janë më të larta dhe reshjet më të rralla. Si do t'i analizoni të dhënat për temperaturat dhe reshjet në të dy zonat në varësi të kushteve të motit? Cilin prej treguesve statistikor: mesataren aritmetike, medianën, modën, do ta përdorje për të vlerësuar ndryshimin? Çfarë do të thotë nëse mesatarja aritmetike për temperaturën në zonën malore është më e ulët se në zonën fushore, ndërsa sasia e reshjeve është më e madhe? Si do të ndikojë kjo në jetën e njerëzve në këto zona?

“Udhërrëfytyesi me yje”

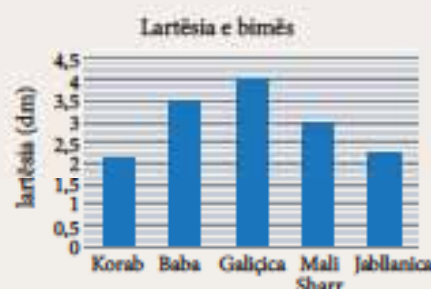
Përdorni pesë yje për të vlerësuar sa e keni kuptuar mësimin.

- ★ – Nuk kuptoj asgjë.
- ★★ – Kuptoj disa koncepte bazë.
- ★★★ – Kuptoj shumicën e gjërave, por ka diçka që nuk më është plotësisht e qartë.
- ★★★★ – Kuptoj shumicën e gjërave dhe mund t’i shpjegoj të tjerëve.
- ★★★★★ – E kuptoj plotësisht materialin dhe mund ta përdor në situata të ndryshme.

Shkruaj numrin e yjeve që mendon se pasqyron njohuritë e tua në fund të mësimin dhe mund të shtosh komente të shkurtëra nëse ke nevojë për ndihmë ose diçka që nuk e ke të qartë.

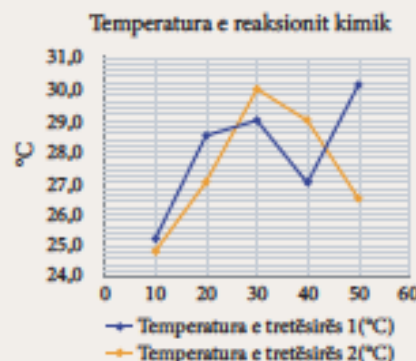
Punë e pavarur

1. Të dhënat për lartësinë e bimës së fierit në disa male në Maqedoninë e Veriut janë paraqitur në një diagram me shtylla:



- a) Vlerësoni mesataren aritmetike për lartësinë e fierit.
- b) Llogarit mesataren e saktë aritmetike.
- c) Gjeni rangun, medianën dhe modën për lartësitë e bimës.

2. Me diagram vijor janë ofruar të dhëna për ndryshimin e temperaturës së tretësirave gjatë një reaksioni kimik:



- a) Vlerësoni mesataren aritmetike të temperaturës së tretësirave.
- b) Llogaritni mesataren e saktë aritmetike.
- c) Krahasoni rezultatet për temperaturën e tretësirave duke përdorur rangun, medianën dhe modën. Cila është diferenca ndërmjet temperaturës më të lartë dhe asaj më të ulët?

3. Në dy paralele të një shkolle janë matur lartësitë e disa nxënësve. Të dhënat janë paraqitur në tabelën më poshtë:

Nxënësit	Paralelja A (lartësia në cm)	Paralelja B (lartësia në cm)
Nxënësi 1	150	155
Nxënësi 2	160	162
Nxënësi 3	155	160
Nxënësi 4	165	168
Nxënësi 5	158	154

- Vlerësoni mesataren aritmetike të lartësive për secilën paralele.
- Cila paralele ka mesataren aritmetike më të madhe?
- Krahasoni të dhënat për lartësinë e nxënësve nga të dy paralelet duke përdorur rangun. Cili nxënës dhe nga cila paralele është më i gjatë?
- Cila paralele ka medianë më të madhe për lartësitë?

4. Një nxënës ka matur sa ujë ka pirë çdo ditë gjatë një jave. Të dhënat janë paraqitur me diagram vijor:



- Vlerësoni mesataren aritmetike të sasisë së ujit që ka pirë nxënësi.
- Verifikoni vlerësimin duke llogaritur mesataren e saktë aritmetike.

5. Ekipet nga dy klasa kanë bërë një anketë për numrin e orëve që nxënësit i kalojnë duke mësuar çdo javë. Rezultatet janë paraqitur në tabelë:

- Krahasoni mesataret aritmetike të të dy ekipeve.
- Cili ekip ka kaluar më shumë orë në mësim?

Ekipi	A	B
Numri i orëve	4, 6, 7, 9, 10	3, 5, 7, 8, 6

6. Marta dhe Nikolla kanë zgjidhur detyra gjatë 4 ditëve. Të dhënat janë paraqitur në tabelë:

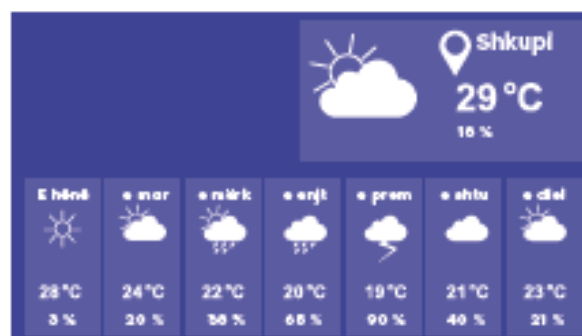
Numri i orëve të kaluara për zgjidhjen e detyrave

Emri	Marta	Nikolla
Koha (h)	3, 5, 2, 7	2, 6, 4, 8

- Përdorni medianën për të krahasuar kohën që secili ka kaluar duke zgjidhur detyra.
- Cili nga ata ka pasur periudhën mesatare më të gjatë për zgjidhjen e detyrave?

Rezultatet e eksperimentit. Probabiliteti

Çdo ditë marrim vendime dhe parashikojmë çka mund të ndodhë – a thua do të bjerë shi, a do të fitojmë në ndonjë lojë ose a thua gjatë hedhjes së zarit do të fitojmë numrin e caktuar. Këto janë shembuj të probabilitetit (gjasës), që na mundëson të kuptojmë se sa është e mundshme që diçka të ndodhë. Në këtë njësi mësimore do të mësoni se si ta përdorni gjuhën e probabilitetit (gjasës) për të përshkruar dhe interpretuar rezultatet e ngjarjeve të ndryshme.



Do të mësoni se si t'i identifikoni gjitha rezultatet e mundshme të një prove, eksperimenti, si t'i klasifikoni kur ato e përjashtojnë njëri – tjetrin dhe si ta llogaritni gjasën kur gjitha rezultatet janë të barasmundshme.

Shembulli 1

Imagjinoni që jeni në një festë ditëlindjeje dhe u ofrojnë të merrni pjesë në një lojë me një kub (zar). Në çdo faqe të zarit ka një numër të caktuar pikësh (1, 2, 3, 4, 5 ose 6). Detyra juaj është të parashikoni se çfarë do të ndodhë bazuar në këto informacione:

- Cilat janë ngjarjet që sigurisht do të ndodhin dhe cilat janë ngjarje të pamundura?
- Cilat ngjarje kanë të probabilitetin (gjasën) e njëjtë që të ndodhin?
- Jepni një shembull të ngjarjeve që kanë probabilitete të ndryshme për të ndodhur.
- Cilat janë të gjitha rezultatet e mundshme kur hidhet kubi?

Zgjidhje:

- Ngjarja e sigurt është që në faqen e sipërme të kubit do të shfaqet një numër pikash nga 1 deri në 6, ndërsa është e pamundur të shfaqen më shumë se 6 ose më pak se 1 pikë.
- Është po aq e mundur që në faqen e sipërme të kubit të shfaqet një numër çift pikash ose një numër tek pikash.
- Ngjarje me probabilitete të ndryshme që mund të ndodhin janë, për shembull: në faqen e sipërme të kubit të shfaqen më pak se 2 pika ose në faqen e sipërme të kubit të shfaqen më shumë se 2 pika
- Rezultatet e mundshme kur hidhet kubi janë: "Në faqen e sipërme të kubit të shfaqet 1 pikë", "Në faqen e sipërme të kubit të shfaqen 2 pika", "Në faqen e sipërme të kubit të shfaqen 3 pika", "Në faqen e sipërme të kubit të shfaqen 4 pika", "Në faqen e sipërme të kubit të shfaqen 5 pika", "Në faqen e sipërme të kubit të shfaqen 6 pika".

Çdo rezultat i një veprimi ose çdo rezultat i një eksperimenti quhet ngjarje elementare. Një bashkësi ngjarjesh elementare quhet ngjarje.

Ngjarjet që mund t'i parashikojmë me siguri, sepse njohim të gjitha arsyet për shfaqjen e tyre, i quajmë ngjarje të sigurta. Ngjarjet që kurrë nuk mund të ndodhin i quajmë ngjarje të pamundura.

Detyra 1

Mile, pa shikuar në sirtar, e nxjerr një çorap. Nëse dihet që në sirtarin e tij ka 10 çorape, prej të cilave 6 janë të zeza, 2 të kaltër dhe 2 të gjelbra, përgjigju:

- Sa rezultate të mundshme ka kur nxjerr një çorap nga sirtari?
- Cilat janë rezultatet e mundshme që përjashtojnë njëri - tjetrin? Shpjegoni ato.
- Cila është ngjarje e sigurt kur Mile nxjerr një çorap nga sirtari dhe cila është ngjarje e pamundur?
- A është e njëjtë mundësia që Mile të nxjerrë një çorap të zi ose një të gjelbër? A është e njëjtë mundësia të nxjerrë një çorap të kaltër ose të gjelbër? Shpjegoni pse.

Shembulli 2

Mateu dhe Sofia luajnë një lojë me rrotën e fatit. Rrota është e ndarë në: 4 fusha të kuqe, 3 të kaltra dhe 3 të verdha, me madhësi të barabarta. Në të ka një shigjetë, kështu që pas rrotullimit të rrotës, shigjeta ndalon në njërin nga fushat e ngjyrosura.

- Numëroni të gjitha rezultatet që fitohen gjatë rrotullimit të rrotës?
- Sa është probabiliteti që shigjeta të ndalet në një fushë të kuqe?
- Sa është probabiliteti që shigjeta të ndalet në një fushë të gjelbër?
- Sa është probabiliteti që shigjeta të ndalet në një fushë të kuqe ose të kaltër ose të verdhë?
- Sa është probabiliteti që shigjeta të ndalet në një fushë të kaltër ose të verdhë?
- Cilat janë rezultatet e mundshme që përjashtojnë njëri - tjetrin? Shpjegoni ato.

Probabiliteti i një ngjarjeje është vlera numerike që shpreh mundësinë që ngjarja të ndodhë. Ai është numër midis 0 dhe 1, ku 0 tregon se ngjarja është e pamundur, ndërsa 1 tregon se ngjarja është e sigurt. Probabiliteti i ngjarjes llogaritet si herës i numrit të rezultateve të favorshme mbi numrin e përgjithshëm të rezultateve të mundshme në një eksperiment të caktuar, pra:

$$\text{probabiliteti} = \frac{\text{numri i rezultateve të favorshme}}{\text{numri i përgjithshëm i rezultateve të mundshme}}$$

Zgjidhje:

- a) Rezultatet e mundshme gjatë rrotullimit të rrotës: “Shigjeta ndalet në fushë të kuqe”, “Shigjeta ndalet në fushë të kaltër” dhe “Shigjeta ndalet në fushë të verdhë”.
- b) Probabiliteti që shigjeta të ndalet në fushë të kuqe:
Numri i fushave të kuqe (rezultate të favorshme) = 4
Numri total i fushave = $4 + 3 + 3 = 10$
Probabiliteti (fusha e kuqe) = $\frac{\text{numri i rezultateve të favorshme}}{\text{numri i përgjithshëm i rezultateve të mundshme}} = \frac{4}{10} = 0,4(40\%)$
- c) Probabiliteti që shigjeta të ndalet në fushë të gjelbër:
Numri i fushave të gjelbra (rezultate të favorshme) = 0
Probabiliteti (fushë të gjelbër) = $\frac{0}{10} = 0 \rightarrow$ ngjarje e pamundur.
- ç) Meqë ngjarja “Shigjeta ndalet në fushë të kaltër ose të kuqe ose të verdhë” është ngjarje e sigurt, pra në çdo rast shigjeta do të ndalet në një nga fushat me ngjyrë që i ka rrota, probabiliteti është 1, përkatësisht:
Probabiliteti (fusha e kuqe ose e verdhë ose e kaltër) = $\frac{4 + 3 + 3}{10} = \frac{10}{10} = 1 (100\%) \rightarrow$ ngjarje e sigurt
- d) Probabiliteti që shigjeta të ndalet në fushë të kaltër ose të verdhë:
Numri i fushave të kaltra = 3, numri i fushave të verdha = 3, numri total i rezultateve të favorshme = $3 + 3 = 6$
Probabiliteti (fusha e kaltër ose e verdhë) = $\frac{3 + 3}{10} = \frac{6}{10} = 0,6 (60\%)$
- dh) Ngjarjet elementare që përjashtojnë njëra-tjetrën janë, për shembull, që shigjeta të ndalet njëkohësisht në fushë të gjelbër dhe të kuqe (sipas rezultateve të përcaktuara, shigjeta mund të tregojë vetëm në një fushë).

Rezultate që përjashtojnë njëri - tjetrin janë rezultatet që nuk mund të ndodhin njëkohësisht.

Rezultate të barasmundshme janë ato rezultate që kanë probabilitet të njëjtë të ndodhin.

Detyra 2

Në një kuti ka 12 toptha: 4 janë të kuq, 3 janë të gjelbër, 2 janë të verdhë dhe 3 janë të kaltër. Nga kutia nxjerrim vetëm një topt.

- Sa rezultate të mundshme jep nxjerrja e një topti nga kutia?
- Cilat rezultate të mundshme përjashtojnë njëri-tjetrin? Shpjegoni.
- Sa është probabiliteti të nxirret topt i gjelbër?
- Nëse nxirrni një topt dhe ai është i verdhë dhe nuk e ktheni përsëri në kuti, sa është probabiliteti që në nxjerrjen e radhës të nxirrni topt të kuq?

Detyra 3

Ana dhe Bojani luajnë lojë me dy zare. Kur hedhin dy zaret, i mbledhin numrat e fituar (numrin e pikëve në faqen e sipërme të zareve). Fitues shpallet ai që fiton shumën 10 ose më shumë.

Ana thotë: “Kam gjasa të mëdha të fitoj!”

Bojani thotë: “Mendoj se është njësoj e mundshme të fitojmë shumën 10 ose jo!”

- Cilat janë shumt e mundshme që mund të fitohen gjatë hedhjes së dy zareve?
- Sa është probabiliteti që shuma të jetë 10 ose më e madhe?
- A ka të drejtë Ana që thotë se ka gjasa të mëdha për të fituar, në bazë të përgjigjes nën b), pohimi i së cilës është i saktë?

Shembulli 3

Markoja në mëngjes informohet për parashikimin e motit që tregon se ka 0.7 (70%) gjasa për reshje shiu gjatë ditës. Ai mendon: “A të marr me vete ombrellën ose jo?” Shoku i tij, Viktori, i thotë:

“Mos e merr ombrellën, ka 30% gjasa të mos bjerë shi!”

- Si ta kuptojmë probabilitetin 0,7 për reshjet e shiut?
- Sa është probabiliteti që të mos ketë reshje shiu?
- Çfarë do t'a këshillonit Markon — ta marrë ose jo ombrellën?

Zgjidhje:

- Probabiliteti për shi është 0,7 (70%), që do të thotë se gjasat për shi janë më të mëdha.
- Këto dy ngjarje përjashtojnë njëra-tjetrën, prandaj probabiliteti që të mos bjerë shi është $1 - 0,7 = 0,3$ (30%), që do të thotë se ka gjasa më të vogla që të mos ketë reshje shiu.
- Probabiliteti për shi është më shumë se 50%, prandaj është më e mençur që Markoja të marrë ombrellën!

Çfarë mësuam nga shembulli?

- Probabiliteti na ndihmon të marrim vendime më të mira në jetën e përditshme.
- Një rrezik i vogël (si në shembullin e bartjes së çadrës) mund të na ndihmojë të shmangim një problem të madh (të lagemi nga shiu).

Kur mundësitë për realizimin e një ngjarjeje janë mbi 50%, ngjarja konsiderohet e mundshme. Kjo do të thotë që probabiliteti i ngjarjes është më i madh se 0,5, që tregon se ka më shumë mundësi të ndodhë sesa të mos ndodhë.

Detyra 4

Markoja dhe Jovana luajnë një lojë me dy zare të ndryshëm. Në secilin zar janë shënuar numrat nga 1 deri në 6. Secili prej tyre hedh dy zaret në të njëjtën kohë. Kush ka gjasa më të mëdha të fitojë nëse: Marko, pas hedhjes së dy zareve, duhet të fitojë një shumë më të madhe se 7, kurse Jovana duhet të fitojë një shumë më të vogël ose të barabartë me 7?

Në cilat situata në jetën e përditshme përdorim probabilitetin për të marrë vendime? A mund të japësh shembuj?

Nëse në një shkollë ka probabilitet 0,8 që së shpejti të mbahet një garë matematikore, si do ta interpretoje këtë informacion? A duhet të përgatitesh?

Në fletore përshkruani dhe mbushni tabelën

Pohime	Nuk mundem	Mundem pjesërisht	Mundem plotësisht
Caktoj probabilitetin bazuar në rezultate të barasmundshme në probleme të thjeshta.			
Mund të përdor numra nga 0 deri në 1 për të përshkruar probabilitetin.			
Në një ngjarje, mund të identifikoj gjitha rezultatet e mundshme që përjashtojnë njëri - tjetrin.			
Mund të jap një shembull nga jeta reale ku probabiliteti më ndihmon të marr vendim.			

Punë e pavarur

- Sa është probabiliteti që kur hidhet zari, faqja e sipërme të ketë numër çift dhe sa është probabiliteti të ketë numër tek?
 - A kanë të njëjtin probabilitet ngjarjet "Në faqen e sipërme të zarit shfaqen 1 ose 2 pika" dhe "Në faqen e sipërme të zarit shfaqen 5 ose 6 pika"? Shpjegoni.
 - Cila ngjarje ka probabilitet më të madh: "Në faqen e sipërme të zarit shfaqet numër çift pikash" ose "Në faqen e sipërme të zarit shfaqen të paktën 2 pika"?
- Përgjidhni rastësisht një numër ndërmjet 1 dhe 10.
 - Sa është numri i rezultateve të mundshme?
 - A ka probabilitet të barabartë përzgjedhja e numrit çift ose numrit tek?
- Përgjidhni rastësisht një numër ndërmjet 1 dhe 25.
 - Sa është numri i rezultateve të mundshme?
 - Sa është probabiliteti që të përzgjidhet numër i thjeshtë?
 - Jepni një shembull të rezultateve, ngjarjeve elementare, që përjashtojnë njëra-tjetrën.
 - A përjashton ngjarja "Përzgjidhet numër tek" ngjarjen "Përzgjidhet numër i thjeshtë"?

4. Po luan një lojë me hedhje zari. Nëse në faqen e sipërme të zarit shfaqen 6 pika, fiton një shpërblim. Nëse në faqen e sipërme del një numër më i vogël se 6, humbet.
- Cili është raporti i probabilitetit për fitore dhe humbje?
 - A është kjo lojë e drejtë? Shpjegoni pse.
 - Nëse organizatori dëshiron ta bëjë lojën më të drejtë, si mund ta ndryshojë rregullin?
5. Në një klub vallëzimi bëjnë pjesë 50 anëtarë. Anëtarët stërviten sipas moshës: të rinj deri në 18 vjeç dhe të rritur mbi 18 vjeç. Tabela më poshtë tregon sa anëtarë ka sipas gjinisë dhe moshës.

Tabela – Numri i anëtarëve në klub sipas gjinisë dhe moshës

	I ri (e re)	I(e) rritur
Femra	15	10
Meshkuj	12	13

Nëse zgjidhet rastësisht një anëtar, cili është probabiliteti që ai të jetë:

- femër
- burrë i rritur
- i ri ose e re
- femër e re

Probabiliteti eksperimental dhe teorik

Në këtë mësim do të njiheni me nocionin e probabilitetit eksperimental, si dhe mënyrën e llogaritjes së tij. Do të jeni në gjendje të dalloni ndryshimet mes probabilitetit eksperimental dhe atij teorik dhe të bëni krahasime në situata të thjeshta. Gjithashtu, kur të grumbulloni të dhëna gjatë kryerjes së një eksperimenti, do të mësoni si t'i përdorni ato për të llogaritur probabilitetin për ngjarjet që kanë ndodhur dhe pastaj do të mund t'i krahasoni me vlerësimet teorike.



Kjo njohuri do të të ndihmojë të kuptoni si funksionojnë probabilitetet dhe të mësoni si t'i përdorni ato në jetën reale.

Shembulli 1

Në një kuti ka 4 toptha me ngjyra të ndryshme: i kuq, i verdhë, i gjelbër dhe i kaltër.

Duhet të nxirrnin një topth nga kutia.

- Cili është probabiliteti që topi i nxjerrë të jetë i kuq?
- Cili është probabiliteti që topi i nxjerrë të jetë i verdhë?
- Cili është probabiliteti që topi i nxjerrë të jetë i gjelbër?
- Cili është probabiliteti që topi i nxjerrë të jetë i kaltër?

Zgjidhje:

Meqë në kuti ka 4 toptha dhe nga secila ngjyrë nga një topth, të gjitha rezultatet e eksperimentit janë të barasmundshme dhe përjashtojnë njëri - tjetrin. Probabiliteti për rezultat është $\frac{1}{4}$.

Detyra 1

Në raftin e dhomës së Jovanës ka 3 libra me poezi, 5 libra trilerë dhe 7 libra literaturë profesionale. Jovana dëshiron të lexojë trilerë. Llogaritni probabilitetin që me një tërheqje të rastësishme (pa parë) nga rafti, Jovana të zgjedhë një libër që i përputhet shijes së saj letrare.

Shembulli 2

Në një kuti ka 3 toptha të kuq dhe 2 toptha të gjelbër. Nxirrnin një topth nga kutia, pa shikuar në të.

- Llogaritni probabilitetin teorik për tërheqjen e një topthi të kuq.
- Bëni një eksperiment: nxirr nga kutia një top 10 herë, me kthim, dhe shënoni rezultatet.
- Llogaritni probabilitetin eksperimental për nxjerrjen e topit të kuq sipas rezultateve të eksperimentit.
- Krahasoni probabilitetin teorik me atë eksperimental.

Zgjidhje:

- a) Probabiliteti teorik = $\frac{\text{numri i rezultateve të favorshme}}{\text{numri i përgjithshëm i rezultateve të mundshme}}$.

Numri i rezultateve të favorshme është 3 sepse në kuti ka 3 toptha të kuq, kurse numri i përgjithshëm i rezultateve të mundshme është 5 (numri i përgjithshëm i topthave në kuti).

Pra, probabiliteti teorik (toptha të kuq) = $\frac{3}{5} = 0,6(60\%)$.

- b) Le të themi se gjatë eksperimentit kemi nxjerrë këto rezultate në 10 tërheqje, pa shikuar në kuti, të topthit, me rikthim të tij në kuti:

Tërheqja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Topthi/ngjyra	i kuq	i gjelbër	i kuq	i kuq	i gjelbër	i kuq	i kuq	i kuq	i gjelbër	i kuq

Pra, nga gjitha 10 tërheqjet, topthi i kuq është tërhequr 7 herë.

$$\text{Probabiliteti eksperimental} = \frac{\text{numri i provave të suksesshme}}{\text{numri i përgjithshëm i provave}}$$

- c) Sipas rezultateve të fituara nga eksperimenti, kemi 7 prova të suksesshme nga gjithsej 10 përpjekje, përkatësisht probabiliteti eksperimental = $\frac{7}{10} = 0,7(70\%)$
- ç) Krahasoni i probabilitetit teorik dhe eksperimental:
Në këtë shembull probabiliteti teorik është 0.6, kurse probabiliteti eksperimental është 0.7. Edhe pse probabiliteti eksperimental është pak më i madh se sa ai teorik, kjo është në rregull. Kjo ndodh për faktin që eksperimentet mund të japin rezultate të ndryshme gjatë realizimit të tyre. Me rritjen e numrit të realizimeve të eksperimenteve gjithmonë e më shumë vlera e probabilitetit eksperimental do t'i afrohet ati teorik.

Sikur të përsëritnim eksperimentin 20, 30, 40... herë, do të fitonim numra të ndryshëm të provave të favorshme, por raporti mes provave të favorshme dhe numrit të përgjithshëm të provave do të ishte një vlerë afër probabilitetit teorik, gjegjësisht 0.6.

Detyra 2

Luani një lojë me zar që në secilën faqe ka një numër të ndryshëm pikash: 1, 2, 3, 4, 5 dhe 6.

- Llogaritni probabilitetin teorik që pas një hedhjeje të zarit në faqen e sipërme të dalë numri 3.
- Kryeni eksperimentin: hidhni zarin 20 herë dhe regjistroni rezultatet.
- Llogaritni probabilitetin eksperimental që në faqen e sipërme të zarit të ketë 3 pika sipas rezultateve të eksperimentit.
- Krahasoni probabilitetin teorik dhe probabilitetin eksperimental.

Shembulli 3

Lena dhe shokët e saj garojnë në hedhjen e monedhës. Gara përbëhet nga 50 hedhje të monedhës. Lena dëshiron të llogarisë probabilitetin që t'i dalë "fytyrë" gjatë 50 hedhjeve të monedhës dhe ta krahasojë atë me probabilitetin teorik.

- Llogaritni probabilitetin teorik që të dalë "fytyrë" në një hedhje të monedhës.
- Lena e hedh monedhën 50 herë. Në rezultatet e saj fiton 22 herë "fytyrë" dhe 28 herë "stemë". Llogaritni probabilitetin eksperimental që të dalë "fytyrë".
- Krahasoni probabilitetin teorik me atë eksperimental.

Zgjidhje:

- a) Hedhja e monedhës jep dy rezultate të barasmundshme: "stemë" ose "fytyrë". Atëherë, probabiliteti teorik që të bjerë "fytyrë" është $\frac{1}{2} = 0,5$.
Probabiliteti teorik që të bjerë "stemë" gjatë një hedhjeje është 0.5 ose 50%.
- b) Lena e ka hedhur monedhën 50 herë dhe ka fituar 22 herë "fytyrë" dhe 28 herë "stemë".
Probabiliteti eksperimental të fitohet "fytyrë" = $\frac{22}{50} = 0,44$ ose 44 %.
- c) Krahësimi i probabilitetit teorik dhe atij eksperimental:
- Probabiliteti teorik është 0.5 ose 50%.
 - Probabiliteti eksperimental është 0.44 ose 44%.

Edhe këtu vlen vërejtja si në shembullin 2 për vlerën e probabilitetit eksperimental dhe atij teorik (dallimi është rezultat i rastësisë që paraqitet gjatë një numri të kufizuar hedhjesh).

Detyra 3

Pronari i një ferme shpendësh ka 100 pula. 80 prej tyre bëjnë vezë të bardha, ndërsa 20 bëjnë vezë ngjyrë kafe. Për të përcaktuar sa vezë, mesatarisht, do të ketë nga secili lloj, fermeri vendos të bëjë një eksperiment.

Fermeri kryen 5 tërheqje të ndryshme (teste) për të parë sa shpesh do të tërheqë pula që bëjnë vezë të bardha. Në secilin prej këtyre testeve ai tërheq 10 pula, vëzhgon çfarë lloj veze do të bëjë secila dhe i regjistron rezultatet.

Ja si duket eksperimenti i tij:

Tërheqja e parë e 10 pulave: rezultati është 8 prej tyre sjellin vezë të bardha dhe 2 sjellin vezë ngjyrë kafe;

Tërheqja e dytë: 7 vezë të bardha dhe 3 ngjyrë kafe;

Tërheqja e tretë: 9 vezë të bardha dhe 1 ngjyrë kafe;

Tërheqja e katërt: 8 vezë të bardha dhe 2 ngjyrë kafe;

Tërheqja e pestë: 6 vezë të bardha dhe 4 ngjyrë kafe.

Pas këtyre 5 testeve të ndryshme, fermeri i përmbledh të gjitha rezultatet për vezët e bardha dhe ato ngjyrë kafe dhe i përdor për të llogaritur probabilitetin eksperimental.

- Llogaritni probabilitetin teorik për tërheqjen e një pule që bën vezë të bardhë dhe probabilitetin teorik për tërheqjen e një pule që bën vezë ngjyrë kafe.
- Llogaritni probabilitetin eksperimental për secilin nga 5 testet.
- Analizoni dhe krahasoni rezultatet e probabilitetit teorik dhe atij eksperimental. Shpjegoni si do të ishte probabiliteti për tërheqjen e një pule që bën vezë ngjyrë kafe dhe pse.

Çfarë do të ndodhte nëse fermeri do të bënte 100 prova në vend të vetëm 5 të tilla? Si do të ndryshonte rezultati në krahasim me probabilitetin teorik prej 80% për vezë të bardhë?

Vlerëso punën tënde, mendo për atë që ke mësuar dhe si e ke zbatuar konceptin e probabilitetit.

1. A mund t'i shpjegoj dallimet midis këtyre dy llojeve të probabilitetit?
(Po/Jo)
2. Kur e llogaris probabilitetin eksperimental, a mund ta krahasoj me atë teorik?
(Po/Jo)
3. A e di lidhjen ndërmjet numrit të provave që i bëj gjatë probabilitetit eksperimental me vlerën e probabilitetit teorik? (Po/Jo)
4. A i kuptoj më mirë parimet e probabilitetit pas kësaj njësie mësimore?
(Po/Jo)

Nëse përgjigjesh me "Po" në shumicën e pyetjeve, kjo do të thotë se e ke kuptuar dhe zbatuar me sukses mësimin. Nëse ke përgjigje "Jo", mendo se çfarë nuk të është e qartë dhe kushto kohë për të përsëritur ato pjesë të mësimin.

Punë e pavarur

1. Markoja po luan një lojë me zar me numra nga 1 deri në 6. Ai e hedh zarin 20 herë. Gjatë këtyre hedhjeve ai ka marrë rezultatet në vijim:
Një pikë në anën e sipërme të zarit: 3 herë,
2 pika: 4 herë,
3 pika: 5 herë,
4 pika: 4 herë,
5 pika: 2 herë,
6 pika: 2 herë.
 - a) Llogaritni probabilitetin që të shfaqet secili numër pikash në anën e sipërme gjatë një hedhjeje të vetme të zarit.
 - b) Llogaritni probabilitetin për secilin numër bazuar në të dhënat nga eksperimenti.
 - c) Krahaso probabilitetet nga pika a) dhe b). Çfarë përfundoni?
2. Maria e ka hedhur monedhën 10 herë. Gjatë hedhjeve, në 6 raste në anën e sipërme është shfaqur "fytyrë", ndërsa në 4 raste "stemë".
 - a) Llogaritni probabilitetin që gjatë një hedhjeje në anën e sipërme të shfaqet njëra nga faqet "fytyrë" dhe "stemë".
 - b) Llogaritni probabilitetin për secilën faqe të monedhës sipas rezultateve të hedhjeve të Marisë.
 - c) Krahasoni probabilitetet. Shpjegoni pse paraqitet ky dallim?

- 
3. Në aparatën për kafë ka tre opsione: makiato, espreso dhe kapuçino. Supozoni se gjitha opsionet janë të barasmundshme.
 - a) Llogaritni probabilitetin teorik për secilin opcion (si thyesë dhe përqindje).
Në 100 përzgjedhjet e fundit në aparatën e kafesë, makiato është përzgjedhur 40 herë, espreso 30 herë, kurse kapuçino 30 herë.
 - b) Llogaritni probabilitetin eksperimental për secilin opcion (si thyesë dhe përqindje).
 - c) Krahasoni probabilitetin teorik dhe eksperimental. Vlera e probabilitetit eksperimental a i afrohet asaj të probabilitetit teorik? Shpjegoni me pak fjalë.
 4. Natasha po përgatitet për të dalë me shokë. Në dollapin e saj ka më shumë rroba edhe atë në 3 ngjyra të ndryshme: 2 të kuqe, 3 të gjelbra dhe 5 të verdha. Natasha nuk mund të vendos për ngjyrën dhe përzgjedh rastësisht, pa shikuar në dollap.
 - a) Llogaritni probabilitetin teorik që të përzgjedh secilën nga ngjyrat e rrobave, përkatësisht.
 - b) Bëni një eksperiment ashtu që do tërhiqni rrobat 20 herë. Pas çdo tërheqje, rroba kthehet në dollap. Llogaritni probabilitetin eksperimental. (Bëni një simulim duke tërhequr letra nga një kuti ku është shënuar ngjyra e rrobës.)
 - c) Krahasoni probabilitetin teorik dhe eksperimental dhe mendoni mbi ndryshimet midis tyre.
 5. Hulumtoni si dhe sa janë të përfshira probabiliteti eksperimental dhe ai teorik gjatë përgatitjes së parashikimit të motit.

